

レポート課題「基礎方程式とその意味を考える」電磁気学パート

担当教員：上田正仁

締め切り：6月11日(月)16:00

提出先：教養学部教務(アドミニストレーション棟レポートボックス)

問1 3個のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して次の公式を証明せよ。

- (i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$,
- (ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
- (iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

問2 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$ として次の量を計算せよ。

- (i) $\nabla \mathbf{r}$, (ii) $\nabla \times \mathbf{r}$, (iii) $\nabla(\log r)$, (iv) $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)$

問3 \mathbf{A} がベクトル、 f をスカラー関数の時、次の公式を証明せよ。

- (i) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,
- (ii) $\nabla \times (\nabla f) = 0$,
- (iii) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$,
- (iv) $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla(A^2) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

問4 次の条件を満足する3次元ベクトル例を1つ考え、それに対して発散 (divergence) と回転 (rotation) を計算せよ。

- (i) 発散はあるが回転はない, (ii) 回転はあるが発散はない

問5 ディラックのデルタ関数に対して次の積分を計算せよ。ただし、 a は正の定数とする。

- (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \delta(x) dx$,
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx$,
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x^2 - a^2) dx$

問6 次の関係式 $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ を示せ。

問7 真空中のマクスウェル方程式を用いて、次の式を示せ。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(c^2 \nabla \rho + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right)$$
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

問8 マクスウェル方程式は、電場が3成分、磁場が3成分で合計6個の関数を決める方程式であるが、他方、方程式の数は8個あり変数の数よりも多い。それで何故矛盾が出ないのかの理由を説明せよ。

問9 ダランベルシャン $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ がローレンツ変換に対して不変であることを示せ。

問10 授業の感想と建設的な提案などをお書きください。