

基礎方程式

上田正仁

平成 25 年 5 月 9 日

目次

3	場の概念について	3
3.1	遠隔作用と近接作用	3
3.2	場とは何か	3
3.3	電場と磁場	4
3.3.1	電荷と電場: クーロンの法則	4
3.3.2	電流と磁場: アンペールの法則	6
4	数学的準備	8
4.1	ベクトルの内積と外積	8
4.2	偏微分	8
4.3	いろいろな微分演算子	8
4.3.1	勾配 (nabla, gradient)	8
4.3.2	発散とガウスの定理	9
4.3.3	回転とストークスの定理	10
4.4	例	11
4.4.1	湧き出しも渦もない場	11
4.4.2	湧き出しのある渦のない場	11
4.4.3	渦のある湧き出しのない場	12
5	クーロンの法則の微分形	12
6	ファラデーの電磁誘導の法則	14
7	アンペールの法則と変位電流	16
8	マクスウェル方程式と電磁波	18

9	マクスウェル方程式と特殊相対論	19
9.1	ニュートン力学とガリレイ変換	19
9.2	マクスウェル方程式とローレンツ変換	20
9.3	ミンコフスキー空間	22

参考書

- 太田浩一 「電磁気学の基礎 I・II」(東京大学出版会) ユニークで面白い
- 砂川重信 「理論電磁気学」(紀伊国屋書店) オーソドックス、理論家向き
- ジャクソン 「電磁気学(上・下)」(吉岡書店) 何でも書いてある、じっくりと読むと電磁気学全般の実力がつく
- ランダウ・リフシッツ 「場の古典論」(東京図書) 上級者向き、電磁気学と(特殊相対論を含む)力学を一通りマスターした人が読むと感動する
- 上田正仁 「現代量子物理学ー基礎と応用」(培風館) 量子力学の基礎と現代物理学への応用
- 講義のアナウンスや講義ノートの公開は下記の web で行う
<http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/lecture.html>

3 場の概念について

3.1 遠隔作用と近接作用

ニュートンは質点が存在できる空の時空間（絶対時空）を考えた。ここで、「絶対」とは、時間や空間座標がどのような運動状態にある観測者から見ても同じ値に取ることができるという意味である。そのような空っぽな絶対時空に存在する質点の間に働く万有引力

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (3)$$

は遠隔作用 (action at a distance) であると考えられた。ここで、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ は万有引力定数である。遠隔作用と言う考え方はニュートンの当時はイギリス以外のヨーロッパ大陸では「オカルト的」と考えられたが、あまりに多くの現象を説明したために次第に受け入れられていった。

これに対して、プラスとマイナスに帯電した電荷の間に働く力は、電荷の周りの真空中に電氣的な歪みが生じ、その歪みが伝搬することにより電氣的な作用が伝わるという近接作用 (action through medium) の考えに基づいて説明された。たとえば、座布団にボールを置くとその周辺がへこみ、へこんだ方に他のボールが吸い寄せられる状況を想像しよう。座布団が真空であり、へこみが真空の歪みと解釈される。あるいは、水に1円玉を浮かべる状況を想像してもよい。水に浮いた2つの1円玉を近づけると、それらは互いに引き寄せられるが、1円玉の間に働く引力の起源は1円玉そのものではなくその間に介在する媒質である水であると考えられる。この場合は水が真空の役割を果たす。このように、真空はからではなく力を媒介する役割を果たす。

以上のように、19世紀末には万有引力に代表される重力は遠隔作用として、電荷間に働く電磁気力は近接作用として理解されていた。このように本質的に異なった考え方が共存していたことは興味深い歴史的事実である。その後、重力もまた「重力場」として近接作用の見方で理解されるようになった。これがアインシュタインの一般相対性理論である。

3.2 場とは何か

遠隔作用の立場から考えると、水に浮いた1円玉を振動させても真空は真空のままで何も変化しないはずであるが、近接作用の立場に立つと、水の表面が波立ちそれが伝搬するように電氣的な歪みが生じてそれが空間を伝搬するであろう。これが電磁波である。アンテナから電波が出るのは、アンテナ中を電流が振動し、それが電波を発するからである。このよう

に、電気現象にとっては真空は空っぽの空間ではなく、電磁波を伝搬させる媒質としての役割を果たす。空気が無ければ音波は伝搬しないが、電磁波は真空中をも伝搬するのである。この意味で、空間のあらゆる場所に電界や磁界が存在できる。そのことを強調するために電磁「場」という言葉を用いる。

電荷が存在するとき空間の各点に電場が生じる。電場は方向を持っているので3成分のベクトル量で

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t)) \quad (4)$$

と書かれる。磁場 \mathbf{B} も同様である。ベクトルは \vec{E} とも表される。質点の運動の場合は、 (x, y, z) は質点の位置という物理量であり、時間 t はパラメーターであったが、電磁場の場合は、電場や磁場が物理量であり、 x, y, z はいずれも空間の座標を表すパラメーターとなる。 (x, y, z) はまとめて \mathbf{r} とも書かれる。電場は英語では electric field と書かれるが、これは空間と時間のあらゆる点で方向と大きさを持ったベクトル量が定義されており、それがあたかも草が生い茂った野原 (field) を想像されるからであろう。座標と時間は連続的な値をとるので、場の量はあらゆる時空点において定義された連続無限の自由度を持った物理量であるといえよう。

電磁気学は電場ベクトル \mathbf{E} と磁場ベクトル \mathbf{H} (あるいは、磁束密度ベクトル \mathbf{B}) によって記述される。これらを含め一般に各点で定義されたベクトル量 (向きと大きさが決まった量) をベクトル場という。これに対して、時空の各点につき1個の値が定義されている場をスカラー場という。スカラー場の例は温度場 $T(x, y, z, t)$ や粒子数の密度場 $n(x, y, z, t)$ である。

3.3 電場と磁場

3.3.1 電荷と電場: クーロンの法則

空間のある場所に試験電荷 q を置いて、それに働く力 \mathbf{F} を測ると、その場所の電場 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{q} \mathbf{F} \quad (5)$$

と定義される。ここで、電荷の単位はクーロン (C)、力の単位はニュートン (N) である。従って、電場の単位は

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} \quad (6)$$

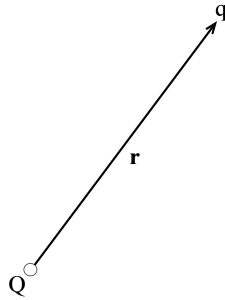


図 1: 2 個の電荷間に働くクーロン力。電場は電荷 Q と試験電荷を結ぶ直線方向に同心円状に生じる。

一般に、2 個の電荷 Q と q が図 1 のように距離 r だけ離れて存在すると両者の間には力

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (7)$$

が働く (厳密に言うと、 Q から q に働く力を \mathbf{F} とすると、 q から Q に働く力は $-\mathbf{F}$ である)。これをクーロンの法則という。ここで、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ はベクトル \mathbf{r} 方向の単位ベクトルである。また、定数 k は真空の誘電率

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \times 10^{-12} \text{A}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \quad (8)$$

$$= 8.854 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1} \quad (9)$$

を用いて

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (10)$$

と表される。ここで、 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ は光速である。(7) 式における力の単位はニュートン、電荷の単位はクーロン、距離の単位はメートルである。これから、同じ電荷量を持った 2 個の電荷を 1m 離して置いたときにそれらの間に働く力が

$$F = \frac{c^2}{10^7} = 8.988 \times 10^9 \text{ Newton} \quad (11)$$

であるときの電荷量を 1 クーロンと決める。

(7) から電荷 q の位置に生じる電場は

$$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (12)$$

であることが分かる。

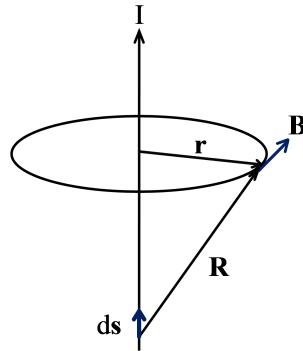


図 2: 直線電流による磁場。磁場は電流の周りに渦状に生じる。

3.3.2 電流と磁場：アンペールの法則

図 2 のように直線電流を流すと、その周りに電場とは異なった性質を持った磁場（磁界） B が生じることが分かる。これは、電流に垂直な板の上に砂鉄をばらまくと同心円上のパターンを描くことが分かる。また、長い磁石の N 極または S 極を近づけると、図 2 の円の接線方向に力が働いていることがわかる。そして、その力の大きさは、電流 I に比例し、半径 r に反比例する。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (13)$$

B は磁束密度とよばれる。その単位は

$$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1} \quad (14)$$

であり、磁束の単位は

$$\text{Wb} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = \text{V} \cdot \text{s} \quad (15)$$

である。ちなみに、 $1\text{Weber}/\text{m}^2 = 1\text{Tesla} = 10^4\text{Gauss}$ である。(13) をアンペールの法則という。ここで、磁束密度は磁場 H と $B = \mu_0 H$ という関係で結ばれている、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H}/\text{m} = 4\pi \times 10^{-7}\text{N}/\text{A}^2$ は真空の透磁率と呼ばれる。

逆に、図 3 のような円電流を流すと原点に発生する磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (16)$$

で与えられる。磁束密度の向きは右ねじの法則で決まる。

磁束密度は電流に作用する力を用いて定義することができる。図 4 のように、定常電流 I を流し、それに垂直に磁場 B を書けると、電流には I

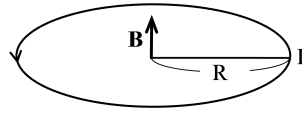


図 3: 円電流による磁場。

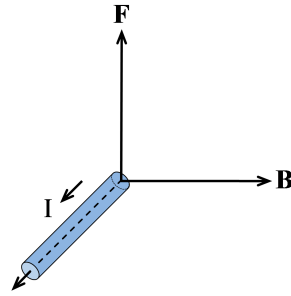


図 4: 磁束密度の定義。

と \mathbf{B} の両方に垂直な方向に力がかかる。導線の長さ Δx あたりにかかる力を \mathbf{F} とすると、これは

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \Delta x \quad (17)$$

で与えられる。これをアンペール力という。これから、磁束密度は

$$B = \frac{F}{I \Delta x} \quad (18)$$

で与えられる。

マクスウェル方程式はベクトル場 \mathbf{E} と \mathbf{B} を決める基礎方程式である。これらは複数の変数 x, y, z, t の関数（これを多変数関数という）なので、方程式は偏微分方程式となる。また、ベクトルの発散と回転を記述する数学（ベクトル解析）が有用となる。これらについては次節で学ぶ。

4 数学的準備

4.1 ベクトルの内積と外積

ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (19)$$

で定義される。内積はスカラー積ともいわれる。外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \quad (20)$$

で定義される。外積はベクトル積ともいわれる。外積の大きさ

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} \quad (21)$$

はベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を2辺とする平行四辺形の面積であり、その方向はこれら2辺に垂直方向である（右手系）。

4.2 偏微分

変数が複数ある場合、他の変数を止めてある変数のみで微分することを偏微分という。

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \quad (22)$$

f が1変数 x のみの関数であるとき、(22) は全微分

$$\frac{df(x)}{dx} \quad (23)$$

となる。

4.3 いろいろな微分演算子

4.3.1 勾配 (nabla, gradient)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (24)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (25)$$

∇f は $\text{grad}f$ とも書かれる。

4.3.2 発散とガウスの定理

ナブラ ∇ とベクトル関数 \mathbf{F} との内積は (19) と同様にして

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (26)$$

で定義される。これを \mathbf{F} の発散 (divergence) といい、 $\text{div}\mathbf{F}$ とも書かれる。発散は物理量の湧きだしを表している。これを理解するために、各辺が dx 、 dy 、 dz の微小な立方体を考える。この立方体の x 方向の湧きだしは次式で与えられる。

$$F_x(x+dx, y, z)dydz - F_x(x, y, z)dydz = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz \quad (27)$$

y 、 z 方向の湧きだしも同様に考えられるので、立方体からの湧きだしの総量は

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dx dy dz \quad (28)$$

となり、単位体積当たりの湧きだしは \mathbf{F} の発散で与えられることが分かる。

ところで、(27) 式の左辺は、立方体の x 座標 x と $x+dx$ において x 軸に垂直な 2 つの面でのベクトル \mathbf{F} の x 成分の表面積分である。これと y 軸と z 軸に垂直な表面について積分したものの和を

$$\int_{\text{微小体積 } dx dy dz \text{ の表面}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (29)$$

と書こう。ここで、 $d\mathbf{S}$ は x 、 y 、 z 方向の単位ベクトル

$$\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0), \quad \hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0), \quad \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1) \quad (30)$$

を用いて

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{x}} dy dz + \hat{\mathbf{y}} dz dx + \hat{\mathbf{z}} dx dy \quad (31)$$

と定義される。積分 (29) は (28) に等しいので

$$\int_{\text{微小体積 } dx dy dz \text{ の表面}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dx dy dz \quad (32)$$

と書ける。

任意の平曲面 S に囲まれた体積は無限小の立方体の和に分解できるので、それらについて (32) を足し上げると表面積分の寄与は打ち消し合うので、公式

$$\int_{S \text{ の表面}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int (\nabla \cdot \mathbf{F}) dx dy dz \quad (33)$$

が得られる。これをガウスの定理という。

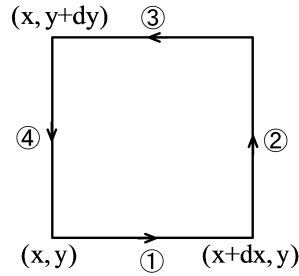


図 5: 回転の意味。

4.3.3 回転とストークスの定理

ナブラ ∇ とベクトル関数 \mathbf{F} との外積は (20) でベクトル \mathbf{a} の各成分をナブラの成分 ($\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$) と置き換えることで

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (34)$$

と書かれる。これを \mathbf{F} の回転 (rotation) といい、 $\text{rot}\mathbf{F}$ または $\text{curl}\mathbf{F}$ と書かれる。回転は物理量の微小領域での渦度を表している。これを理解するために、図5のような微小な長方形の周りに沿ってベクトル量 \mathbf{F} の線積分を考える。このような線積分は

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (35)$$

と書かれる。ここで、 $d\mathbf{l}$ は (30) で定義された単位ベクトルを用いて

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz \quad (36)$$

と定義される。図5の各部分の積分は

$$\textcircled{1} = F_x(x, y, z)dx$$

$$\textcircled{2} = F_y(x + dx, y, z)dy = F_y(x, y, z)dy + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial x} dx dy$$

$$\textcircled{3} = -F_x(x, y + dy, z)dx = -F_x(x, y, z)dx - \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y} dx dy$$

$$\textcircled{4} = -F_y(x, y, z)dy$$

よって、これらの和は

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = (\nabla \times \mathbf{F})_z dx dy \quad (37)$$

となることが分かる。ここで、最後の式の下付きの文字 z はカッコ内のベクトルの z 成分であることを示している。(35) と (37) から次の公式が得られる。

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{F})_z dx dy = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy \quad (38)$$

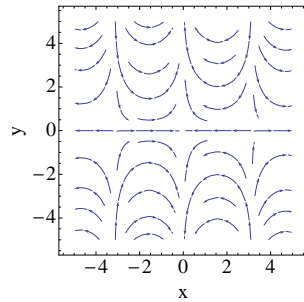


図 6: 湧き出しも渦もない場。

この公式は閉曲線が xy 平面にある場合について考えたが、一般の 3 次元の場合は右辺の $z dx dy$ は (31) の $d\mathbf{S}$ に置き換えられる。

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{F})_z dx dy = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (39)$$

この公式は微小な領域について証明されたが、これらを閉曲線 C で囲まれた有限な領域 S に拡大しても成立することが示せる (境界の寄与は互いにキャンセルする)。この時、右辺は積分で置き換わり

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (40)$$

が得られる。これをストークスの定理という。

4.4 例

4.4.1 湧き出しも渦もない場

$$\mathbf{F} = (-\sin kx \cosh ky, \cos kx \sinh ky, 0) \quad (41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (42)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (43)$$

4.4.2 湧き出しのある渦のない場

$$\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} \quad (44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 0 = 2 \quad (45)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (46)$$

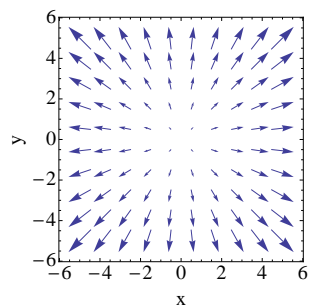


図 7: 湧き出しのある渦のない場。

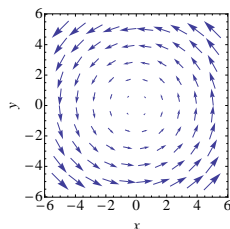


図 8: 渦のある湧きだしのない場。

図 7 から発散のある場は湧き出しがあることが分かる。

4.4.3 渦のある湧き出しのない場

$$\mathbf{F} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} \quad (47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (48)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{z}} \quad (49)$$

図 8 から回転のある場は渦が存在することが分かる。

5 クーロンの法則の微分形

(33) で得られたガウスの定理の \mathbf{F} に (12) 式で与えられるクーロンの法則の電場

$$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = kQ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (50)$$

を代入してみよう。閉曲面として、原点を中心とする半径 r の球面を考えると、(33) の左辺の積分は球の表面積が $4\pi r^2$ なので

$$kQ \frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (51)$$

で与えられる。他方、右辺の被積分関数は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = kQ \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = 0 \quad (52)$$

となり矛盾しているように見える。このような矛盾が生じた理由は、電場が原点で無限大となっているのでその点では微分できないのに微分したからである。原点以外では (52) は正しいはずなので、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ は原点以外ではゼロ、原点では無限大でその体積積分が (51) に等しくならなければならない。従って、

$$\int \int \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) dx dy dz = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (53)$$

ここで、ディラックのデルタ関数という関数を導入する。この関数は次の2つの条件を満足する関数として定義される。

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \quad (54)$$

かつ $x = 0$ で連続的な任意の関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (55)$$

を満足する。特に、(55) で $f(x) = 1$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (56)$$

が得られる。

デルタ関数は、超関数の一種であり、普通の関数の極限として定義される。

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (57)$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} \quad (58)$$

これらはいずれも、上記の条件 (54)、(55)、(56) を満足する。

デルタ関数は次のような性質を満足する。

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (59)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (60)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (61)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (62)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (63)$$

$$\theta'(x) = \delta(x) \quad (64)$$

ここで、 x_i は、 $f(x)$ の根 (すなわち、 $f(x_i) = 0$ 、ただし、重根を除く) であり、また、 $\theta(x)$ は $x > 0$ で 1、 $x < 0$ で 0、 $x = 0$ で 1/2 の値をとる階段関数である。

デルタ関数を用いると、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ が次の形をとればガウスの法則が満足されることが分かる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (65)$$

これはクーロンの法則の微分形であり、ポアソン方程式と呼ばれる。

一般に電荷 Q_i を持った N 個の点電荷が位置 $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) に分布している場合の電荷密度の分布は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (66)$$

で与えられる。この時のポアソン方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (67)$$

と書かれる。

6 ファラデーの電磁誘導の法則

図9のように、ある閉曲線 C で囲まれた面 S を貫く磁束 Φ が時間変化する時、閉曲線に沿って発生する起電力を V が発生し、それは

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (68)$$

で与えられる。これをファラデーの電磁誘導の法則という。ここで、磁束

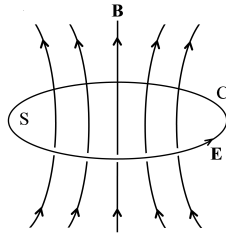


図 9: ファラデーの電磁誘導の法則。

Φ は磁束密度 \mathbf{B} を面 S で積分した量で与えられる。

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (69)$$

これから

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (70)$$

また、起電力 V は閉曲線 C に沿って電場を積分することによって与えられる。

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (71)$$

(71) にストークスの定理を適用すると

$$V = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (72)$$

(70) と (72) を (68) に代入すると

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (73)$$

これが任意の閉曲面 S に対して成立しなければならないので

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (74)$$

が得られる。これはファラデーの法則の微分形であるとみなせる。両辺の発散をとると $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ より

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (75)$$

よって、 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ は時間に依存しない定数となる。クーロンの法則の微分形であるポアソン方程式 (67) からこの定数は磁場の湧きだしの源になる磁

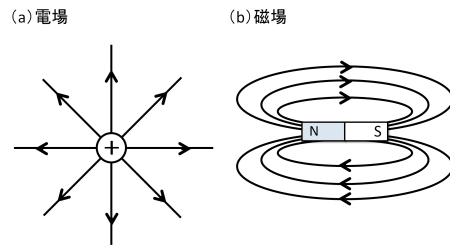


図 10: (a) 電荷による電場分布。(b) 磁石による磁場分布。

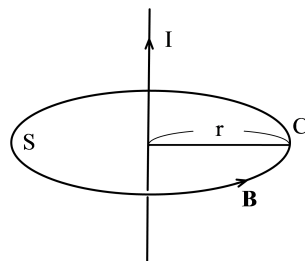


図 11: アンペールの法則。

荷に比例することが分かる。しかし、実験事実として単独の磁荷は存在しないことが知られている。従って、この定数はゼロである。

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (76)$$

図 10 のように、単独の電荷があると電場はそこから放射状に無限遠まで広がる。しかし、磁気単極子は存在しないので、磁場は必ずN極から出てS極で終端される。

7 アンペールの法則と変位電流

図 11 のように直線の導線に定常電流 I が流れると、その周りにアンペールの法則 (13) に沿って磁場が発生する (図 11)。これから

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad (77)$$

この式の左辺は図 11 の閉曲線 C に沿って磁場を線積分した量 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 。右辺は C の内側の曲面 S で電流密度 \mathbf{J} を面積分した量に μ_0 をかけたものに等しい。よって、

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (78)$$

左辺にストークスの定理を適用すると

$$\int \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (79)$$

これが任意の曲面 S について成立するためには

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (80)$$

この式は定常電流の場合は正しいが、電流が変動して空間的に電荷が生じるような状況では正しくない。実際、両辺の発散をとると $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ より $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ となるが、この右辺は電荷が存在する場合は連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (81)$$

を満足しなければならない。実際、この式の両辺をある平曲面 S で囲まれた領域 V で体積積分すると

$$\int \int \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \rho dV \quad (82)$$

右辺の積分は領域 V に存在する全電荷量 Q に等しい。左辺は、ガウスの定理により表面積分におきかえることができる。従って、

$$\int \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (83)$$

この式は、ある領域の表面から単位時間当たりに出ていく全電流量（左辺）は、その領域に含まれる全電荷の減少量（右辺）に等しいことを意味している。このように連続の方程式は電荷の保存則を表している。

マクスウェルは連続の方程式 (81) を常に満足するためには (80) は次のように拡張すればよいことを洞察した。

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (84)$$

この右辺に現れる量 $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ は変位電流と呼ばれる。実際、両辺の発散をとると左辺はゼロとなり、連続の方程式 (81) が再現されることが分かる。

8 マクスウェル方程式と電磁波

以上の議論により、電場と磁場の方程式は (67)、(74)、(76)、(84) により決定されることが分かる。これらを再度書くと次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{電荷のポアソン方程式} \quad (85)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{ファラデーの法則} \quad (86)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{磁化のポアソン方程式} \quad (87)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (88)$$

アンペール・マクスウェルの法則

以下では電荷や電流が存在しない真空中の電磁場を考える。遠隔作用の観点から考えると、電場や磁場の源である電荷や電流が存在しないと電磁場は存在しないことになるが、以下に示すようにこの場合も真空中を伝搬する電磁場が存在する。

まず、ファラデーの法則 (86) の両辺の回転をとると左辺は

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (89)$$

ここで、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を使った。右辺は (88) を用いると

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (90)$$

こうして電場が満足すべき次の式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (91)$$

同様に、(88) の回転をとることによって磁場が満足すべき方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (92)$$

ここで、

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s (光速)} \quad (93)$$

であることに注意すると、次のような電場と磁場の従う波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (94)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (95)$$

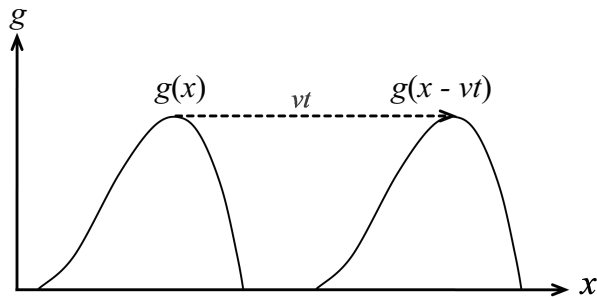


図 12: 関数 $g(x - vt)$ は $g(x)$ を右へ vt だけ形を変えずに平行移動したものである。

波動方程式は、電場と磁場が真空中を光速度 c で伝搬していることを示している。このことを理解するために空間が 1 次元の波動方程式を考えよう。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \quad (96)$$

この方程式は 2 個の独立な解 $f(x, t) = g(x - ct), g(x + ct)$ を持つことが (96) に直接代入することにより確かめることができる。ここで、 $g(y)$ は任意の関数とする。実際、 $y = x - ct$ とおくと、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} g = \frac{\partial^2}{\partial y^2} g \quad (97)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} g = \frac{\partial^2}{\partial y^2} g \quad (98)$$

となり、 $g(x - ct)$ が実際に解になっていることが分かる。同様に $g(x + ct)$ も解になっていることが示せる。 $g(x - ct)$ は関数 $g(x)$ を右側に ct だけ平行移動してものなので (図 12 参照)、この解は右方向に速度 c で形を変えずに伝搬している波を記述していることが分かる。同様に、解 $g(x + ct)$ は左方向に速度 c で形を変えずに伝搬する波を記述している。

9 マクスウェル方程式と特殊相対論

9.1 ニュートン力学とガリレイ変換

簡単のため 1 次元空間で考える。この時、静止している座標系 (x, t) とそれに対して右向きに一定の速度 v で運動している座標系 (x', t') を考え

る。ニュートン力学ではこれら 2 つの座標系の間は次の関係式で結ばれている。

$$t' = t, \quad x' = x - vt \quad (99)$$

これをガリレイ変換という。ニュートン方程式はガリレイ変換に対して不変である。実際、

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad (100)$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (101)$$

なので、どちらの座標系から見てもニュートン方程式の形は同じである。すなわち、

$$f = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (102)$$

このように、座標系が違ってても方程式が同じ形を保つことを、ニュートン力学はガリレイ変換に対して不変という。

9.2 マクスウェル方程式とローレンツ変換

では、波動方程式 (94)、(95) はどうかと言うと、これらはガリレイ変換では不変でないことが分かる。これを見るために、これらの方程式に現れる微分演算子

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (103)$$

を考える。この微分演算子 \square はダランベール演算子、またはダランベルシャン (d'Alembertian) と呼ばれる。は次のように変換され形が保たれないことが分かる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2v}{c} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \quad (104)$$

これは、異なった座標系の人から見ると法則 (方程式) が違って見えるということを意味していて具合が悪い。そこで、ダランベルシャンが不変に保たれる変換として次の形を試してみよう。

$$ct' = \alpha(ct - \beta x) \quad (105)$$

$$x' = \gamma(x - \delta ct) \quad (106)$$

この時、二つの座標系 (x, t) と (x', t') の微分演算子の間には次の関係が成立することが分かる。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -\gamma \delta c \frac{\partial}{\partial x'} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} \quad (107)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\alpha \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (108)$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \left(-\gamma \delta c \frac{\partial}{\partial x'} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 - \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\alpha \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{c^2} (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \gamma^2 (1 - \delta^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2\alpha\gamma}{c} (\beta - \delta) \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \end{aligned}$$

これが

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (109)$$

に等しくなることを要請すると次の条件式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha^2 (1 - \beta^2) &= 1, \quad \gamma^2 (1 - \delta^2) = 1, \quad \beta = \delta \\ \rightarrow \alpha &= \gamma, \quad \beta = \delta, \quad \alpha^2 (1 - \beta^2) = 1 \end{aligned} \quad (110)$$

よって

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (111)$$

が得られる。ここで、条件 $\alpha^2 (1 - \beta^2) = 1$ は変換の行列式が1であることを示している。従って、これは時間と空間の回転であることが分かる。実際、一般に座標の回転は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (112)$$

右辺の行列の行列式は $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ である。(111) をローレンツ変換という。アインシュタインの特殊相対性理論によると、

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (113)$$

である。

9.3 ミンコフスキー空間

(111) と (112) は形は似ているが、違いが2点ある。一つ目は、(112) の行列要素はいずれも1より小さいが、(111) の行列要素は1よりも大きい。2番目の違いは、(112) の2個の非対角要素は符号が異なっているが(111) は同じである点である。このため、(112) は行列の要素の自乗の和が一定に保たれる ($x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$) が、(111) は自乗の差が一定に保たれる。すなわち、

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 \quad (114)$$

回転によって自乗の和が保たれる空間はユークリッド空間と呼ばれるが、差が保たれる空間はミンコフスキー空間 (Minkowski space) と呼ばれる。