# レポート課題「基礎方程式とその意味を考える」
## (電磁気学パート，担当教員：上田 正仁)

締切：6 月 28 日（金）16:00

提出先：教養学部教務（アドミニストレーション棟レポートボックス）

真空中のマクスウェル方程式 (1)(2) について考えよう．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\ \nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{2}$$

問題 1. $\boldsymbol{A}$ がベクトル関数，$f$ がスカラー関数の時，次の公式を証明せよ．

(a) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

問題 2. (a) $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|$ に対して次の量を計算せよ．

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$，(2) $\nabla r$，(3) $\nabla r^n$，(4) $\nabla\times(\boldsymbol{r}r^n)$

(b) $\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を示せ．

問題 3. マクスウェル方程式 (1)(2) を用いて，次の式を示せ．

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu_0\left(c^2\nabla\rho+\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\right) \tag{3}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=-\mu_0\nabla\times\boldsymbol{j} \tag{4}$$

問題 4. (a) 次式が式 (4) の解であることを示せ．ただし，$\nabla''=(\frac{\partial}{\partial x''},\frac{\partial}{\partial y''},\frac{\partial}{\partial z''})$ である．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\int d^3\boldsymbol{r}'\left.\frac{\mu_0\nabla''\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right|_{\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'} \tag{5}$$

(b) $\nabla\times\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{j}$ の例を考え，$\nabla\times\boldsymbol{j}$ と $\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ を計算せよ．

(c) 前問で考えた $\boldsymbol{j}$ は物理的な電流密度となり得るかどうか考察せよ．

問題 5. ダランベルシャン $\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$ がローレンツ変換に対して不変であることを示せ．ただし，以下では簡単のため，ローレンツ変換として静止している座標系 $(\boldsymbol{r},t)$ から，これに対して $x$ 軸の正の方向に一定の速度 $v$ で運動している座標系 $(\boldsymbol{r}',t')$ への変換を考える．また，$(\boldsymbol{r}',t')$ 系で見た物理量にはプライム (’) をつけて表す．

問題 6. 電荷の保存則とは，「電荷が無から生成あるいは消滅することが無い」という経験法則であり，電荷密度 $\rho$ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_{\text{任意の立体 }V}\rho(x,y,z,t)\,dxdydz=-\int_{V\text{ の表面}}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6}$$

と表すことができる．この時，以下の問に答えよ．

(a) 式 (6) の左辺と右辺がそれぞれどのような量を表しているのか明確にして，確かに「電

荷が無から生成あるいは消滅することが無い」ことを表していることを説明せよ．

(b) 式 (6) から

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{7}$$

を導け．ただし，$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \rho\, dxdydz = \int\int\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dxdydz$ を用いて良い．

(c) 実はマクスウェル方程式には電荷の保存則が含まれている．このことを示せ．

問題 7. $(\boldsymbol{x}', t')$ 系での電荷・電流密度が $(\boldsymbol{x}, t)$ 系での電荷・電流密度を用いて $\rho' = \alpha(c\rho + \beta j_x)$, $j'_x = \gamma(j_x + \delta c\rho)$, $j'_y = j_y$, $j'_z = j_z$ と書けると仮定する．各座標系で電荷の保存則が成り立つことから，$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ を決定せよ．

問題 8. ここまでの結果を組み合わせて電場と磁場のローレンツ変換を導出しよう．

(a) 式 (3)(4) の右辺の量がどのようなローレンツ変換を受けるか書き下せ．

(b) ローレンツ変換の下で式 (3)(4) が不変であることに注意して，電場と磁場のローレンツ変換を導け．(ヒント：$\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ の各成分は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の 6 成分の線形結合で書ける)

(c) 前問で導いたローレンツ変換の下で元のマクスウェル方程式 (1)(2) の形が不変であることを示せ．

問題 9. 授業の感想と建設的な提案などをお書きください．