物理数学３ (上田正仁) 期末試験(試験時間：90 分)

2015/2/9

問題 1 から問題 4 全てに解答せよ。問題に不備、条件不十分な点等があると思われる場合は、どの点をどのように修正、解釈したかを明記した上で、その修正、解釈の下で解け。

解答用紙は 2 枚である。用紙の裏面も用いてよい。回答用紙が足りなくなったら試験監督に申し出よ。
遅刻は試験開始後 30 分までである。試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

1　$SU(2)$ と $SO(3)$ のリー代数

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ をパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

とする。$\mathfrak{su}(2)$ リー代数の基底を

$$S_1 = \frac{\sigma_x}{2},\ S_2 = \frac{\sigma_y}{2},\ S_3 = \frac{\sigma_z}{2} \tag{2}$$

にとる。

(1)　$\mathfrak{su}(2)$ リー代数 $\{S_i\}_{i=1}^3$ の交換関係と構造定数を求めよ。これから、随伴表現を求めよ。また、随伴表現の張るリー代数 $\{\mathrm{ad}(S_i)\}_{i=1}^3$ が $\mathfrak{so}(3)$ リー代数 $\{X \in iM(3, \mathbb{R}) | X + {}^tX = 0\}$ と同型であることを示せ。

(2)　随伴表現 $\mathrm{ad}(S_i)(i = 1, 2, 3)$ で生成される指数写像を求め、これらが $SO(3)$ の元であることを確かめよ。

(3)　上で求めた随伴表現に対してカルタン計量を求め、$\mathfrak{su}(2)$ リー代数がコンパクトリー代数であることを証明せよ。

2　外積の計算

(1)　n 次元空間上での r 形式

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \tag{3}$$

の張る空間の次元 $D_{r,n}$ を独立な成分の数 $\{\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\}$ により定義する。$D_{r,n}$ を求めよ。

(2)　ξ, ω をそれぞれ r-形式、s-形式とする。外積と外微分に関する以下の二つの式を証明せよ。

$$\xi \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \xi \tag{4}$$

$$d(\xi \wedge \omega) = d\xi \wedge \omega + (-1)^r \xi \wedge d\omega \tag{5}$$

3　オイラーの多面体定理

オイラーの多面体定理は 3 次元空間中の S^2 に同相な多面体 P に対して、その頂点、辺、面の数をそれぞれ e, f, g とする時に

$$e - f + g = 2 \tag{6}$$

が成立するというものである。これは以下のようにして証明できる。

(1)　2 次元空間中の多角形 P について、(P の頂点の数)−(P の辺の数)+(P の面の数) を計算せよ。

(2)　2 次元空間中の多角形 $P_1, P_2, \cdots P_n$ の辺を貼り合わせてできる図形 P について常に (P の頂点の数)−(P の辺の数)+(P の面の数)= 1 が成立することを示せ。

(3)　前問までの結果を用いてオイラーの多面体定理を証明せよ。

オイラーの多面体定理の証明から考えるに、一般に 3 次元空間中の多面体 P について (P の頂点の数)−(P の辺の数)+(P の面の数) は位相不変量になると考えられる。この位相不変量はオイラー標数 $\chi(P)$ と呼ばれ、ベッチ数を用いて $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2$ と書くことができる。即ち $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2 =$($P$ の頂点の数)−(P の辺の数)+(P の面の数) である。
3 次元空間中に埋め込まれた 2 次元多様体 M に対しても同相な多面体 P を考えてそのオイラー標数を計算することで M のオイラー標数を計算することができる。

(4)　トーラスに同型な多面体を考えることで種数 1 のトーラス Σ_1(図 1) のオイラー標数 $\chi(\Sigma_1)$ を求めよ。また一般に種数 g のトーラス Σ_g(穴が g 個あいたトーラス) についてオイラー標数 $\chi(\Sigma_g)$ を求めよ。

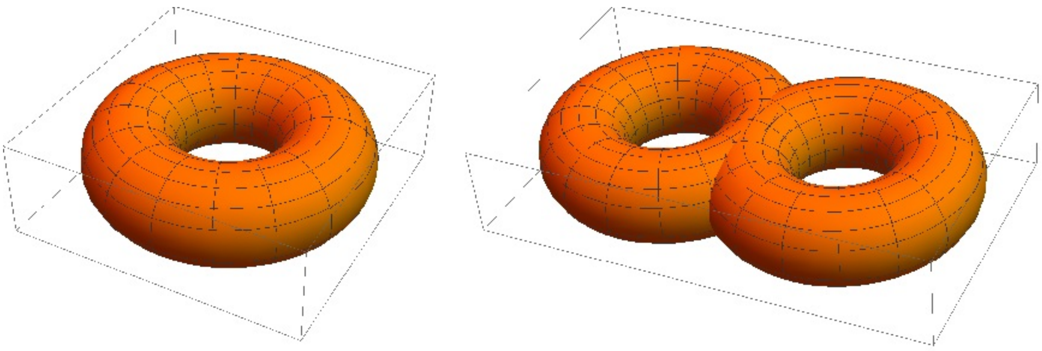

図 1　種数 1 のトーラス (左) と種数 2 のトーラス (右)

4　マクスウェル方程式の書き換え

マクスウェル方程式

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 & (7) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 & (8) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j} & (9) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (10) \end{cases}$$

を書き換えることで座標に依らない表現ができることを証明しよう。以下では添え字 i, j, k は $1, 2, 3$ をとり、添え字 $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ は $1, 2, 3, 4$ をとるものとする。光速 $c = 1$ とする。

(1)　座標に依らない表現ができるということがどうして重要なのかを説明せよ。

(2)　マクスウェル方程式はパリティ変換に対して不変である。これから電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ極性ベクトル、軸性ベクトルであることを説明せよ。

(3)　$x_4 = it$ とする。電磁テンソルに対する 2 形式 ω_{em} を以下の式で定義する。

$$\omega_{em} := -iE_i dx^i \wedge dx^4 + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k \tag{11}$$

電磁テンソルがホッジスター作用素を用いて

$$\omega_{em} := -iE_i dx^i \wedge dx^4 + B_i * (dx^i \wedge dx^4) \tag{12}$$

と書き直すことができることを証明せよ。

電荷密度と電流密度に対応した 3 形式

$$\omega_{\rho j} := -\frac{i\rho}{\epsilon_0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \mu_0 j_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^4 \tag{13}$$

を導入する。

(4)　以上の計算をもとに、マクスウェル方程式が

$$(7), (8) \Leftrightarrow d\omega_{em} = 0 \tag{14}$$

$$(9), (10) \Leftrightarrow d * \omega_{em} = \omega_{\rho j} \tag{15}$$

と書き直せることを示せ。また、これをもとにマクスウェル方程式が座標に依らない表現であることを説明せよ。

(5)　式 (15) から電荷の保存則を導け。

(6)　単連結な多様体上では 2 形式は $\omega_{em} = dA$ のように書くことができる。ここで導入した 1 形式 A が電磁ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を用いて $A = A_i dx^i + i\phi dx^4$ と書くことができることを説明せよ。また、これをもとにマクスウェル方程式がゲージ不変であることを説明せよ。

5　授業に関して

授業に関して率直かつ建設的な意見を述べてください（この部分は成績評価には影響しません）。