物理数学3　homework1 2014/10/6

1 小問集合 (第 1 章分)

1. 部分群である必要十分条件
   G を群とする。G の部分集合 H が部分群となる必要十分条件が
   $$e \in H \tag{1}$$
   $$\forall g, \forall h \in H, gh^{-1} \in H \tag{2}$$
   であることを証明せよ。

2. 準同型定理
   群や体、ベクトル空間等数学では様々な代数的構造を考えるため、写像の中でも代数的構造を保つクラス (射) はとりわけ重要な意味を持つ。様々な代数的構造に対して射を導入することができ、そのそれぞれについて準同型定理が成り立つ[*1]。準同型定理は代数的構造に普遍的に存在するが、ここではその最も基本的な例として群の準同型定理を示そう。
   G, G' を群とし、準同型写像 $f : G \to G'$ を考える。以下の誘導 (1)(2) に従って次の定理を証明せよ。

   群の準同型定理

   準同型写像 $f : G \to G'$ に対して
   $$G/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f \tag{4}$$

   (1)　$\mathrm{Ker}f = \{g \in G | f(g) = e'\}$ が正規部分群となることを証明せよ。

   従って商群 : $G/\mathrm{Ker}f$ が定義できる。
   写像 $\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ を
   $$\tilde{f}(gN) = f(g) \tag{5}$$
   により定義する。この時、任意の $n \in N$ に対して $f(gn) = f(g)$ となるため、写像 $\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ は $n \in N$ の取り方によらずに定まり、**well defined** である。[*2]

   (2)　$\tilde{f}$ が $\tilde{f}(gh) = \tilde{f}(g)\tilde{f}(h)$ を満たすこと[*3]、$\mathrm{Im}f$ が G' の部分群であること、$\tilde{f}$ が全単射であることを証明せよ。

3. 巡回群
   $g^k \neq e (k = 1, 2, \cdots N-1)$ を満たす e, g について、$C_N = \{e, g, g^2, \cdots g^{N-1}\}$ で与えられる位数 N の群を位数 N の巡回群という。これは角度 $2\pi/N$ の回転で生成される空間群と同型

[*1] もっともなじみ深いのは線形写像の準同型定理
線形写像 $f : V \to V'$ に対して
$$V/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f \tag{3}$$
であろう。

[*2] 10 月 13 日訂正箇所

[*3] 10 月 22 日訂正箇所

である。

(1)　巡回群が可換群であることを示せ。また、位数 N の巡回群 C_N について、その正規部分群、共役類、正則表現、既約表現、指標を求めよ。(既約表現と指標は 2 章の内容であるので、2 章分を授業でやった後に解くとよい。)

(2)　位数 p が素数の群は巡回群 C_p に同型であることを証明せよ。

(3)　(2) を参考に位数が 7 以下の有限群をすべて書き出せ。

(ヒント：各位数 N についての同型でない群の数 M は
$(N,M)=(1,1),(2,1),(3,1),(4,2),(5,1),(6,2),(7,1)$ である。ほとんどは可換群の直積である。)

4. ケーリーの定理

これまでノートで出て来た、あるいはレポート問題で扱った有限群は全て置換群かその部分群に同型である。これは一般に以下のケーリーの定理が成立するためである。

ケーリーの定理

位数 N の有限群は、置換群 S_N かその部分群に同型である。

従って、「ある意味では」有限群は巡回群で尽きており、巡回群とその部分群を調べることで有限群は理解できるということができる。

ケーリーの定理を以下のような方法で証明しよう。

有限群 G の位数を N とし、その元を $\{g_1, g_2, \cdots g_N\}$ とする。$f : G \to S_N$ を

$$f(g) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ gg_1 & gg_2 & \cdots & gg_N \end{pmatrix} \tag{6}$$

により定義する。これを用いて、ケーリーの定理を証明せよ。また、この写像が同型写像になるのはいつか？

5. なぜ既約表現を考えるのが重要なのか？

群表や指標表などの面倒な計算をしてまで、既約表現を求めたいと思うのはなぜか。同種粒子の表現など具体例を挙げながら、「対称性」という言葉をキーワードに説明せよ。