物理数学3　homework11 2014/1/26

1　Aharonov-Bohm 効果

トポロジカルな量が物理に現れる例として Aharonov-Bohm 効果を考えてみよう。
ポテンシャル $U(\boldsymbol{x})$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ が存在する下での 1 個の粒子の従うシュレディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla - i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))^2 + U(\boldsymbol{x})\right]\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

と書くことができる。これの解を $\psi_s(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A})$ とする。
(1)　ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ がゼロ磁場条件 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たすとする。この時、ベクトルポテンシャルがある場合の解 $\psi_s(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A})$ とベクトルポテンシャルのない場合の解 $\psi_s(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0})$ が以下のような式で結びつくことを証明せよ。

$$\psi_s(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) = \psi_s(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0})\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\int^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right) \tag{2}$$

(2)　半径 R の円筒内に磁束 Φ が通っているとする。マクスウェル方程式を解くことにより、円筒外でのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を求めよ。直交座標でも極座標で書いてもよいが、答えは 1 形式 $A = A_x dx + A_y dy = A_r dr A_\theta d\theta$ の形で書け。

図 1 のような 2 重スリットによる電子の干渉問題を考える。電子の通る道には ABD と ACD の 2 通りがあるとし、四角形 ABDC に囲まれるように磁束 Φ の通っている半径 R の円筒があるとする。磁束は円筒内の十分狭い領域に局在しており、円筒は十分スリットに近くにあるため、干渉する電子の通り道には磁場はないものとする。

(3)　スクリーン上 D での波動関数の振幅 ψ は経路 ABD を通ってきたもの ψ_u と経路 ACD を通ってきたもの ψ_d の重ね合わせ $\psi = \psi_u + \psi_d$ である。磁束がない時の波動関数の振幅を ψ_0 とすると、スクリーンの中心で電子の見出される確率は

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2\left(1+\cos\left(\frac{e\Phi}{\hbar}\right)\right) \tag{3}$$

と書けることを示せ。また、これがゲージの自由度 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\chi$ に依存しないことを示せ。
従って、これは位相不変量の 1 つであると考えられる。どのベッチ数に対応したものか？
量子力学的な荷電粒子が電場や磁場の存在しない領域でも電磁ポテンシャルの影響を受ける現象を Aharonov-Bohm 効果という。

(4)　中空の超伝導体を貫く磁束は量子化され、$\frac{h}{2e}$ の整数倍の値のみをとる。磁束を $0, \frac{h}{2e}, \frac{h}{e}, \frac{3h}{2e}\cdots$ と変化させていく時、スクリーン中心での干渉縞の明暗はどのように変化するか？

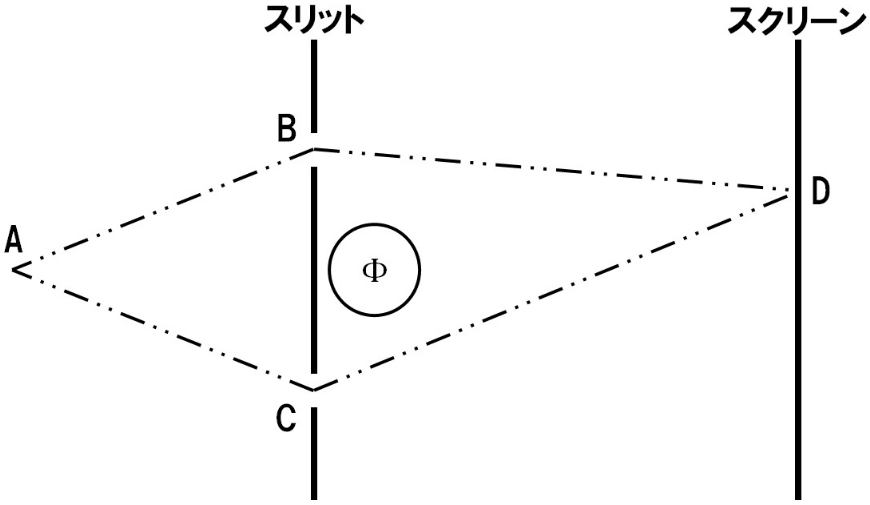

図 1　Aharonov-Bohm 効果の模式図

2　オイラーの多面体定理と正多面体

オイラーの多面体定理は 3 次元空間中の S^2 に同相な多面体 P に対して、その頂点、辺、面の数をそれぞれ e, f, g とする時に

$$e - f + g = 2 \tag{4}$$

が成立するというものである。これは以下のようにして証明できる。

(1)　 2 次元空間中の多角形 X について、(X の頂点の数)$-$(X の辺の数)+(X の面の数) を計算せよ。

(2)　 2 次元空間中の多角形 $X_1, X_2, \cdots X_n$ の辺を貼り合わせてできる図形 X について常に (X の頂点の数)$-$(X の辺の数)+(X の面の数)$= 1$[*1]が成立することを示せ。

(3)　前問までの結果を用いてオイラーの多面体定理を証明せよ。
(ヒント：多面体 P から 1 つ面を取り去り、その展開図を考えると前問に帰着する。また、(4) の左辺は連続変形に対して不変であることを用いよ。)

(4)　オイラーの多面体定理を用いることで、正多面体が、正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体に限られることを示せ。

オイラーの多面体定理の証明から考えるに、一般に 3 次元空間中の多面体 P について (P の頂点の数)$-$(P の辺の数)+(P の面の数) は位相不変量になると考えられる。この位相不変量はオイラー標数 $\chi(P)$ と呼ばれ、ベッチ数を用いて $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2$ と書くことができる。即ち $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2 =$($P$ の頂点の数)$-$(P の辺の数)+(P の面の数) である。
3 次元空間中に埋め込まれた 2 次元多様体 M に対しても同相な多面体 P を考えてそのオイラー

[*1] 1 月 30 日訂正箇所

標数を計算することで M のオイラー標数を計算することができる。

(5)　トーラスに同型な多面体を考えることで種数 1 のトーラス Σ_1(図 2) のオイラー標数 $\chi(\Sigma_1)$ を求めよ。また一般に種数 g のトーラス Σ_g(穴が g 個あいたトーラス) についてオイラー標数 $\chi(\Sigma_g)$ を求めよ。

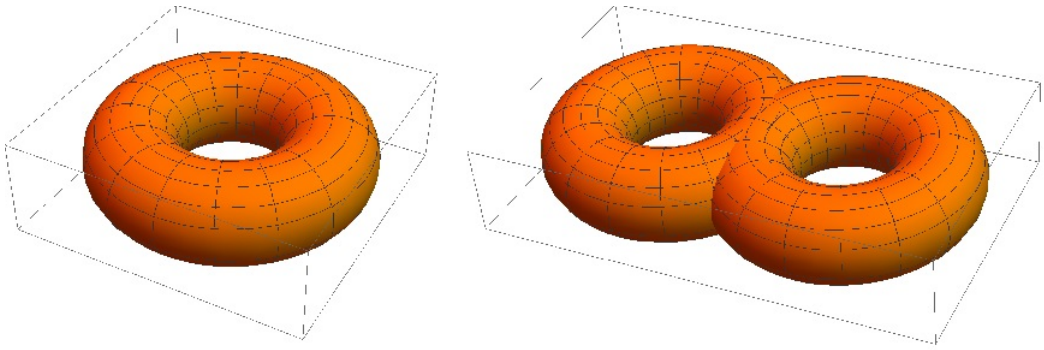

図 2　種数 1 のトーラス (左) と種数 2 のトーラス (右)