物理数学3　homework12 2014/1/29

1　ホッジスター演算子の数学

講義ノートではホッジスター演算子によるマクスウェル方程式の簡便な記述など物理への応用を中心に学んだが、ホッジスター演算子はリーマン多様体やケーラー多様体などの多様体に対して一般に定義することができ、数学としても深い内容を持っている。

(1)　ホッジスター演算子の定義が基底の取り方に依らない定義であることを説明せよ。

(2)　n 次元多様体 M 上の k 形式の全体を $A(k;M)$ とし、$\omega,\eta \in A(k;M)$ とする。ホッジスター演算子に対する以下の恒等式を示せ。

$$**\omega = (-1)^{(n-k)k}\omega \tag{1}$$

$$\omega \wedge *\eta = \eta \wedge *\omega \tag{2}$$

また、ホッジスター演算子 $* : A(k;M) \to A(n-k;M)$ が線形な全単射写像であることを証明せよ。

(3)　余微分作用素 δ とラプラス作用素 Δ を

$$\delta := (-1)^k *^{-1} d* \tag{3}$$

$$\Delta := \delta d + d\delta \tag{4}$$

により定義する。$\Delta\omega = 0$ を満たす微分形式は調和形式と呼ばれる (これはポテンシャル論で登場する調和関数の一般化である)。余微分作用素とラプラス作用素に対する以下の恒等式を証明せよ。

$$\delta\delta = 0 \tag{5}$$

$$*\delta = (-1)^k d* \tag{6}$$

$$*d = (-1)^{k+1}\delta* \tag{7}$$

$$*\Delta = \Delta* \tag{8}$$

(4)　多様体 M 上の k 形式の空間に内積を以下の式で定義する。

$$(\omega,\eta) := \int_M \omega \wedge *\eta \tag{9}$$

これが、確かに内積の性質 (双線形性、対称性、正定値性、非退化性) を満たすことを証明せよ。

また、前問までの結果を用いることにより以下の恒等式を証明せよ。

$$(d\omega,\eta) = (\omega,\delta\eta) \tag{10}$$

$$\Delta\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = \delta\omega = 0 \tag{11}$$

最後の式から調和形式が完全形式と密接に関係し、調和形式を多様体の位相を図る量として使うことができるを表している。

以上で示したものはホッジ理論と呼ばれるものの基礎である。上の計算を進めることにより、k 形式の空間 $A(k;M)$ の小平ドラーム分解

$$A(k;M) = H(k;M) + dA(k-1;M) + \delta A(k+1;M) \tag{12}$$

を得ることができる ($H(k;M)$ は調和 k 形式の空間)。ホッジ理論を用いることにより、リーマン多様体やケーラー多様体に対してはベッチ数など一般の多様体に定義される不変量も精密な不変量があることを示すことができる。

2 曲線座標系における微分作用素

0 形式 f、1 形式 ω、2 形式 Ω に対する。講義ノートにある以下の式を参考にすることで円筒座標系 (r,θ,z)、極座標系 (r,θ,ϕ) におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}=(A_r,A_\theta,A_z)=(A_r,A_\theta,A_\phi)$ の回転、発散とスカラー場 f のラプラシアンを求めよ。

$$(\mathrm{rot}\omega)_i=\frac{\epsilon^{ijk}}{g_jg_k}\frac{\partial(\omega_kg_k)}{\partial u_j} \tag{13}$$

$$(\mathrm{div}\Omega)_i=\frac{1}{2g_1g_2g_3}\left[\frac{\partial(\Omega_1g_2g_3)}{\partial u_1}+\frac{\partial(\Omega_2g_3g_1)}{\partial u_2}+\frac{\partial(\Omega_3g_1g_2)}{\partial u_3}\right] \tag{14}$$

$$\Delta f=\frac{1}{g_1g_2g_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{g_2g_3\partial f}{g_1\ \partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{g_3g_1\partial f}{g_2\ \partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{g_1g_2\partial f}{g_3\ \partial u_3}\right)\right] \tag{15}$$