

物理数学3 homework2 2014/10/15

1 有限群の基本計算

群の基本概念 (正規部分群、共役類、指標など) を S_3 以外の例に即して考えよう。

例 1 : C_{2h}

C_{2h} は C_2H_4 の対称性を表す群であり、その群表は下のように与えられる。

C_{2h}	e	c_2	σ_h	I
e	e	c_2	σ_h	I
c_2	c_2	e	I	σ_h
σ_h	σ_h	I	e	c_2
I	I	σ_h	c_2	e

ここで c_2 は C=C 軸周りの角度 π 回転、 σ_h は C=C 軸に垂直な面での鏡映、 $I = c_2\sigma_h$ である。群表を参考に C_{2h} の位数、正規部分群、共役類、指標を求めよ。特に正規部分群についての商群を考えることにより $C_{2h} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を証明せよ。また、この分解の物理的意味は何か？

例 2 : D_4

D_4 は正方形の対称性を表す群である。正方形の面に垂直な軸での角度 $\pi/2$ の回転を θ 、対角線を軸とする反転を τ とする時、 $D_4 = \{e, \theta, \theta^2, \theta^3, \tau, \tau\theta, \tau\theta^2, \tau\theta^3\}$ である。^{*1}

- (1) D_4 の群表を作れ。
- (2) D_4 の位数、正規部分群、共役類を求めよ。
(ヒント : 共役類は 5 つあるはずである。)
- (3) 群の位数 N と既約表現の次元 $\{n_\alpha\}_\alpha$ の間の関係式

$$N = \sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 \quad (1)$$

を用いることにより各既約表現の次数を求めよ。

- (4) D_4 の指標表を作れ。
(ヒント : 1次元表現の指標は相似変換により常に 1 か -1 にできることを用いてよい。指標の直交性を用いると計算が速い。)

^{*1} 10月26日訂正箇所