物理数学3　homework3 2014/10/20

1　ヤング図の計算とハドロンの分類

ヤング図は N 種類の状態をとる変数 $q=\{q_i\}_{i=1}^N$ に対して、$\{q_iq_j\}_{i,j=1}^N$ や $\{q_iq_jq_k\}_{i,j,k=1}^N$ などのテンソル積を完全対称な既約表現、部分対称な既約表現、完全反対称な既約表現に分解するものである。

(1)　$\{q_iq_j\}_{i,j=1}^N$ を表すヤング図は

$$\ydiagram{1}\otimes\ydiagram{1}=\ydiagram{2}\oplus\ydiagram{1,1} \tag{1}$$

とかける。対称表現 $\ydiagram{2}$ の次元と反対称表現 $\ydiagram{1,1}$ の次元を求めよ。また、下の例を参考にしてそれぞれの表現に属する $\{q_iq_j\}_{i,j=1}^N$ の元を書き下せ。

例：既約表現に対応したヤング図とそれに属する $\{q_iq_j\}_{i,j=1}^N$ の元の関係は

$$\begin{ytableau} q_1 \end{ytableau}\otimes\begin{ytableau} q_2 \end{ytableau}=q_1q_2,\quad \begin{ytableau} q_1 & q_2 \end{ytableau}=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1q_2+q_2q_1), \tag{2}$$

のように書ける。

(2)　次に 3 つのテンソル積 $\{q_iq_jq_k\}_{i,j,k=1}^N$ を考える。これの完全対称、部分対称、完全反対称な既約表現への分解は

$$\ydiagram{1}\otimes\ydiagram{1}\otimes\ydiagram{1}=\ydiagram{3}\oplus\ydiagram{2,1}\oplus\ydiagram{2,1}\oplus\ydiagram{1,1,1} \tag{3}$$

と書けることを示せ。また、それぞれの既約表現の次元とそれに属する $\{q_iq_jq_k\}_{i,j,k=1}^N$ の元を上の例を参考に書き下せ。

ヒント：たとえば、完全対称な既約表現に属する元の一つ $\begin{ytableau} a & b & c \end{ytableau}$(但し、$a,b,c$ は互いに異なる) は

$$\begin{ytableau} a & b & c \end{ytableau}=\frac{1}{\sqrt{6}}(abc+acb+bac+bca+cab+cba) \tag{4}$$

のようにかける。

(3)　$N=2$ の場合は (3) で求めた分解の最終項は消える。これはなぜかを説明せよ。

ヤング図を用いたハドロンの分類

(この問題は難しいので適宜講義ノート巻頭に挙げられている教科書を参考にせよ。)

標準模型においては、力は電磁気力と弱い相互作用、強い相互作用の 3 種類があり、素粒子にはクォークとレプトン、ゲージ粒子、ヒッグス粒子がある。素粒子のうち、クォークは中性子や陽子を作る重要な要素であるが、強い相互作用の性質の為単体で現れることはない。クォーク同士やクォークと反クォークが強い相互作用で結びついた複合粒子をハドロンという。ハドロンにはクォークと反クォーク (クォークの反粒子)1 個ずつが結びついたメソン、クォーク 3 つからなるバリオンがある。陽子や中性子はバリオンの 1 種である。

クォークは u, d, s, c, b, t の 6 種類あるが、このうち質量の軽い 2 つのクォーク u, d は電磁気力と弱い力を無視し、強い力のみを考えるとき縮退した 2 つの状態ととらえることができる。つまり、強い力は 2 つのクォーク u, d に関して近似的に $SU(2)$ 対称性を持つと考えてよい。これをアイソスピン対称性という。ハミルトニアンと対称性の関係から、強い相互作用の結果現れる陽子や中性子といった複合粒子はアイソスピン対称性の既約表現を用いて分類できる。
u, d クォークに対応した状態の波動関数を $|u\rangle, |d\rangle$ とかく。アイソスピン対称性は以下で表される変換に対する不変性を表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} |u\rangle = x\,|u\rangle + y\,|d\rangle \\ |d\rangle = z\,|u\rangle + w\,|d\rangle \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SU(2) \tag{5}$$

安定には存在しないが u, d クォーク 2 つから成る複合粒子を考えてみると、これはテンソル積 $\{|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \,|\, q_i = u, d\}$ で張られる空間に属する 4 つの状態である。状態 $|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle$ は以下のヤング図に対応する。

$$\boxed{q_1} \otimes \boxed{q_2} \quad (q_1, q_2 = u, d) \tag{6}$$

u, d クォークが 3 つ集まって出来るバリオンの状態はテンソル積 $\{|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle\,|q_3\rangle \,|\, q_1, q_2, q_3 = u, d\}$ で張られる空間に属する 8 つの状態である。状態 $|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes |q_3\rangle$ は以下のヤング図に対応する。

$$\boxed{q_1} \otimes \boxed{q_2} \otimes \boxed{q_3} \quad (q_1, q_2, q_3 = u, d) \tag{7}$$

(4)　(3) の $N = 2$ の場合を参考に (7) を既約表現に分解せよ。また、8 つのバリオン状態を既約表現ごとに分類し、各既約表現ごとにそれに属するバリオン状態を書き下せ。
(5)　ハドロンの分類では u, d だけでなく質量の軽い s クォークも含めて、アイソスピン対称性を拡張して $SU(3)$ 対称性で考えることが多い (この対称性はアイソスピン対称性ではなく、フレーバー対称性と呼ばれる)。上に倣って u, d, s クォークが 3 つ集まってできる 27 種類のバリオン状態を既約表現ごとに分類し、各既約表現ごとにそれに属するバリオン状態を書き下せ。