物理数学3　homework4　2014/11/10

1　小問集合：第3章

1. $\mathfrak{su}(2)$ リー代数
   $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ をパウリ行列とする。$\mathfrak{su}(2)$ リー代数の基底を[*1]
   $$S_1 = \frac{\sigma_x}{2},\ S_2 = \frac{\sigma_y}{2},\ S_3 = \frac{\sigma_z}{2} \tag{1}$$
   にとる。
   (1)　$\mathfrak{su}(2)$ リー代数 $\{S_i\}_{i=1}^3$ の交換関係と構造定数を求めよ。これから、随伴表現を求めよ。また、随伴表現の張るリー代数 $\{\mathrm{ad}(S_i)\}_{i=1}^3$ が $\mathfrak{so}(3)$ リー代数 $\{X \in iM(3,\mathbb{R}) | X + {}^tX = 0\}$ と同型であることを示せ[*2]。
   (2)　随伴表現 $\mathrm{ad}(S_i)(i = 1, 2, 3)$[*3]で生成される指数写像を求め、これらが $SO(3)$ の元であることを確かめよ。
   (3)　$\mathrm{Ad}(SU(2)) \simeq SO(3)$ を示せ。
   (4)　上で求めた随伴表現に対してカルタン計量を求め、$\mathfrak{su}(2)$ リー代数がコンパクトリー代数であることを証明せよ。

2. ローレンツ群のカルタン計量
   (1)　x 方向のローレンツ変換[*4]
   $$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{2}$$
   $$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{3}$$
   のパラメター空間 $\{(\beta, \gamma)\}$ を考えることで、ローレンツ群がコンパクトではないことを説明せよ。
   (2)　ローレンツ変換の生成子と回転の生成子を組み合わせることによりローレンツ群のリー代数のカルタン計量を求めよ。リー代数の基底の取り方は問わないが、カルタン計量を求めるのに簡単なものをとるとよい。
   (3)　計量の固有値の符号と縮重度を求めよ。特に、符号が正負両方現れ、コンパクトリー代数にならないことを確認せよ[*5]。

3. リー代数の保存量
   リー代数 $\{X_i\}_i$ の構造定数を f_{ijk}、カルタン計量を g_{ij} とする。この時
   $$C_2 = g^{ij} X_i X_j \tag{4}$$
   は任意の X_i と可換であることを証明せよ。$\mathfrak{su}(2)$ リー代数についてこの量を計算し、C_2 が全角運動量と対応していることを示せ。

[*1] 12月3日訂正部分
[*2] 12月3日訂正箇所
[*3] 12月3日訂正箇所
[*4] 12月3日訂正部分
[*5] 数学的に「コンパクト群のリー代数であること」と「カルタン計量が不定値なリー代数を持つ群がコンパクトであること」は同値であることが証明できる。

2　$SU(2)$ と $SO(3)$：ステレオグラフ写像

$SO(3)$ と $SU(2)$ は同一のリー代数を持つので局所的に同型である。二つは大域的に同型ではないが、離散部分群で「割る」程度の違いしかなく、$SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$ が成立する。このことを幾何的に証明しよう。
3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球 S を考える。S 上の点 (0,0,-1) を P と置き、$\zeta \in \mathbb{C}$ を点 $\mathrm{Q}(\mathrm{Re}\zeta, \mathrm{Im}\zeta, 0)$ に対応させる。直線 PQ と S の交点を $\mathrm{R}(x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))$ と置き、写像 $f : \mathbb{C} \to S \backslash \{P\}$ を $f(\zeta) = (x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))$ のように書く。写像 f をステレオグラフ写像という。

(1)　$x(\zeta) + iy(\zeta), z(\zeta)$ を ζ の関数として求め、f が全単射であることを示せ。[*6]

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{5}$$

に対して、$\zeta = \xi/\eta$ と置く。

(2)　$x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta)$ を ξ, η の関数として書き直せ。

α, β, γ を実数とする。

$$g_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{-i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \quad g_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{6}$$

と置く。

(3)　$\mathbb{C}^2$ 内の変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto g_1(\alpha) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{7}$$

に対して、対応する S 上の点 $(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta))$ はどのように変換されるか。

(4)　$\mathbb{C}^2$ 内の変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto g_2(\beta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{8}$$

に対して、対応する S 上の点 $(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta))$ はどのように変換されるか。

(5)　**一般に SU(2) の元は**[*7]

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = g_1(\alpha) g_2(\beta) g_1(\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{-i(\alpha+\gamma)}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\mathrm{e}^{\frac{-i(\alpha-\gamma)}{2}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \mathrm{e}^{\frac{i(\alpha-\gamma)}{2}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \mathrm{e}^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{9}$$

とかける。(α, β, γ) をケーリー・クラインのパラメターという。
対応する $(x, y, z) \in S$ への変換が Euler 角 (α, β, γ) で表される $SO(3)$ の元であることを示せ。

[*6] 複素平面に無限遠点を含めた $\bar{\mathbb{C}}$ と S に対して f は全単射である。
[*7] 12 月 3 日訂正部分

ヒント：z 軸周りの角度 γ の回転、y 軸周りの角度 β の回転、x 軸周りの角度 α の回転を合成してできる $SO(3)$ の元を $O(\alpha,\beta,\gamma)$ と書く。行列の形で書くと下のようになる。

$$O(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

一般に $SO(3)$ の元は $O(\alpha,\beta,\gamma)$ の形で書くことができ、(α,β,γ) をオイラー角という。

(6)　$D(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto O(\alpha,\beta,\gamma)$ は準同型写像である。準同型定理から $SU(2)/\mathbb{Z}_2\simeq SO(3)$ を示せ。