物理数学3　homework5　2014/11/17

1　$SU(2)$ と $SO(3)$

(1)　SU(2) の任意の元が

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1}$$

とかけることを証明せよ。

従って

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle|\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \tag{2}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \middle|\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} \tag{3}$$

であるから、$SU(2) \simeq S^3$(群としての同型ではない) であり、$SU(2)$ は単連結なリー群である。

(3)　$SO(3)$ のリー代数と $SU(2)$ のリー代数が一致することを示し、$SO(3)$ の普遍被覆群が $SU(2)$ であることを示せ。

2　直交群 $O(n), SO(n)$

(1)　直交群 $O(n)$ が群をなすことを示せ。
(2)　$g \in O(n)$ について $\det(g) = \pm 1$ を示せ。
(3)　$SO(n)$ が $O(n)$ の正規部分群であることを示せ。
ヒント：正規部分群の定義に照らし合わせて直接的に証明してもよいが、一般に準同型写像 $f : G \to G'$ に対して $\mathrm{Ker} f$ が正規部分群になることを用いて証明してもよい。f として行列式をとる写像を考えよ。
(4)　$O(n)$ は連結でないことを示せ。

$SO(n)$ は連結であることも証明できる。

(5)　$SO(n)$ と $O(n)$ が同一のリー代数を持つことを示せ。また、そのリー代数の基底を 1 種類書き、それについての指数写像を求めよ。リー代数の基底の取り方は問わないが、指数写像が求めやすいような形をとるとよい。

従って $SO(n)$ と $O(n)$ は高々離散部分群程度しか違わない。

(6)　行列式をとる写像 $\det : O(n) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ が準同型写像であることを証明し、$O(n)/SO(n) \simeq \mathbb{Z}_2$ であることを示し、$\mathbb{Z}_2$ 程度の違いが鏡映操作に対応していることを説明せよ。