物理数学3　homework6 2014/12/1

1　古典群の性質

5 章で扱うように、コンパクトリー群の分類は完成しておりこれらは古典群と呼ばれる。古典群は $SU(n), SO(2n+1), Sp(2n), SO(2n)$ の 4 つの無限系列と 5 つの例外群からなる。古典群のうちユニタリ群や直交群、シンプレクティック群の 4 つの無限系列は物理でもなじみ深い。

表の最上段に倣って (ア)〜(ク) に当てはまる言葉や数字を答えよ。証明も書くこと。

名称	群の元	リー代数の元	群の次元
$GL(n,\mathbb{C})$	行列式 1 の複素行列	任意の複素行列	$2n^2$
$SU(n)$	行列式 1 のユニタリ行列	(ア)	(イ)
$SO(2n+1)$	行列式 1 で大きさが奇数の直交行列	(ウ)	(エ)
$Sp(2n)$	シンプレクティック形式を保つ大きさが偶数行列	(オ)	(カ)
$SO(2n)$	行列式 1 で大きさが偶数の直交行列	(キ)	(ク)

但し、シンプレクティック形式とは 2 次形式

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{2n} \tag{1}$$

($\mathbf{0}, \mathbf{1}$ は大きさ n のゼロ行列と単位行列) を言い、行列 $A \in M(2n, \mathbb{R})$ がシンプレクティック形式を保つというのは

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \tag{2}$$

が成立することを言う。

2　スピン群

一般に $SO(n)$ は単連結ではないため、$SO(n)$ は普遍被覆群にならない。特殊直交群 $SO(n)$ の普遍被覆群をスピン群と言い $\mathrm{Spin}(n)$ とかく。$SO(3)$ の普遍被覆群が $SU(2)$ になることは先回の homework で証明した。ここでは $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$ を証明しよう。

(1)　以下に示す **6** つの行列 $\{L_i, K_i | i, j = 1, 2, 3\}$ が $\mathfrak{so}(4)$ リー代数の基底となることを示せ。[*1]

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(2)　$\{L_i, K_i | i, j = 1, 2, 3\}$ をリー代数の基底に取った時の交換関係を求めよ。

(3)　以下のようにリー代数の基底を $\{A_i, B_i | i, j = 1, 2, 3\}$ に取り直した時のリー代数の交換関係を求めよ。これから $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ を示せ。

$$A_i = \frac{1}{2}(L_i + K_i),\ B_i = \frac{1}{2}(L_i - K_i) \tag{4}$$

(4)　新しい基底 $\{A_i, B_i | i, j = 1, 2, 3\}$ に対して、構造定数とカルタン計量を計算せよ。また、随伴表現を求めよ。単純リー代数と半単純リー代数の定義を述べ、$\mathfrak{so}(4)$ がいずれに属するかを答えよ。

(5)　一般に 2 つの単連結な多様体の直積多様体が単連結になることを証明し、$\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$ を示せ。

注意：特殊直交群の普遍被覆群が特殊ユニタリ群になることは n の小さな場合特有の現象である。

[*1] 12 月 3 日訂正部分