物理数学3　homework7 2014/12/15

1　不変積分

(1)　$\mathbb{R}$ を和についての群と見た時の不変体積を求めよ。また、加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ への同型写像が指数関数で与えられることを用いて、乗法群の不変体積が $dx/x (x \in \mathbb{R}^\times)$ で与えられることを証明せよ。

(2)　1 次元のアフィン変換群 Aff($\mathbb{R}$) を

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & 1 \end{array} \right) . \middle| x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, y\ in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

により定義する。群の演算は行列の積により定義する。

1 次元アフィン変換群の左不変積分と右不変積分を求め、これらが一致しないことを証明せよ。これは表現がユニタリでないためである。

(3)　$U(1) = \{\mathrm{e}^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ の不変体積を求めよ。

(4)　前回の homework で証明した通り、

$$SU(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{array} \right) \middle| \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} \simeq S^3 \tag{2}$$

である。これを用いて $SU(2)$ の不変体積が

$$\frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \tag{3}$$

で与えられることを説明せよ。

また、この不変体積をケーリー・クラインパラメター $(\alpha, \beta, \gamma)(0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < \pi, -2\pi \leq \gamma < 2\pi)$ で書きなおし、$SU(2)$ の不変体積をケーリー・クラインパラメターで表せ。

(4)　$SU(2)$ が $SO(3)$ と局所同型であることを用いて $SO(3)$ の元をオイラー角 $(\alpha, \beta, \gamma)(0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < \pi, 0 \leq \gamma < 2\pi)$ で書いた時の不変体積を求めよ。