

物理数学3 homework9 2014/1/5

1 外積の計算

(1) n 次元空間上での r 形式

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (1)$$

の張る空間の次元 $D_{r,n}$ を独立な成分の数 $\{\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}\}$ により定義する。 $D_{r,n}$ を求めよ。

(2) 変数変換 $y^i = A_{ij}x^j$ に対して、式 (1) の係数 $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ の変換則を求めよ。

(3) ω の外微分 $d\omega$ について、その成分の変数変換 $y^i = A_{ij}x^j$ に対する変換則を計算せよ。前問の結果と合わせるにより $d\omega$ が $r+1$ 形式の変換則に従うことを示し、外微分をとるという操作が変数の選び方に依らない操作であることを説明せよ。

(4) ξ, ω をそれぞれ r -形式、 s -形式とする。外積と外微分に関する以下の二つの式を証明せよ*1。

$$\xi \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \xi \quad (2)$$

$$d(\xi \wedge \omega) = d\xi \wedge \omega + (-1)^r \xi \wedge d\omega \quad (3)$$

*1 1月30日訂正箇所