物理数学3　homework10 2014/1/19

1　スカラー・擬スカラー・ベクトル・擬ベクトル

3 次元実空間 $\mathbb{R}^3$ 上で定義された 0 形式 $\omega_0 = f_0(\boldsymbol{x})$、1 形式 $\omega_1 = f_1^x(\boldsymbol{x})dx + f_1^y(\boldsymbol{x})dy + f_1^z(\boldsymbol{x})dz$、2 形式 $\omega_2 = f_2^z(\boldsymbol{x})dx \wedge dy + f_2^x(\boldsymbol{x})dy \wedge dz + f_2^y(\boldsymbol{x})dz \wedge dx$、3 形式 $\omega_3 = f_3(\boldsymbol{x})dx \wedge dy \wedge dz$ を考える。$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = (f_1^x(\boldsymbol{x}), f_1^y(\boldsymbol{x}), f_1^z(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (f_2^x(\boldsymbol{x}), f_2^y(\boldsymbol{x}), f_2^z(\boldsymbol{x}))$ とおく。

(1)　座標の回転 $y_i = R_{ij}x_j$(R_{ij} は回転行列) に対する $f_0, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, f_3$ の変換性を答え、これらがスカラーあるいはベクトルとして変化することを示せ。
(2)　パリティ変換 $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$ に対する $f_0, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, f_3$ の変換性を答え、前問と合わせてそれぞれの変換性をスカラー、擬スカラー、ベクトル、擬ベクトルのいずれかに分類せよ。
(3)　上と同様に一般の n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 上の 0 形式、1 形式、$n-1$ 形式、n 形式を用いて n 次元空間上のスカラー、擬スカラー、ベクトル、擬ベクトルが構成せよ。擬スカラーと擬ベクトルが構成できるための n の条件は何か。

2　ベクトル解析の計算

(1)　$f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ に対して、その微分 df を求めよ。また、1 形式 df に対応するベクトル場を (x, y) 面内にプロットせよ。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置くとき df は (r, θ) の関数としてどのように書かれるか。df の表すベクトル場の物理的意味を答えよ。
(2)　静電場 $\boldsymbol{E}$ はポテンシャル ϕ を用いて、$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\phi$ と書くことができる。一様電場 $\boldsymbol{E} = (Ex, Ey, Ez)$ を与えるポテンシャルを一つ上げよ。また、ポテンシャルにはどの程度の不定性があるか。
(3)　静磁場 $\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて、$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ と書くことができる。一様磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を与えるベクトルポテンシャルを一つ上げよ。また、ベクトルポテンシャルにはどの程度の不定性があるか。
(4)　$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ を x, y, z 方向の単位ベクトルとし、$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}, r = |\boldsymbol{r}|$ とする。関数 $f(\boldsymbol{r}) = f_1(r), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = f_2(r)\boldsymbol{r}$ に対して、$\mathrm{grad}f, \mathrm{rot}\boldsymbol{g}, \mathrm{div}\boldsymbol{g}$ を求めよ。