物理数学 3　homework 1

2015/10/5

問題 1 (群と準同型)
群は積 (結合積)、単位元、逆元で特徴づけられる代数構造である。

(1) 積、単位元、逆元のそれぞれについて説明せよ。
(2) 群 G から群 G' への写像 $f\colon G \longrightarrow G'$ は、群の代数構造を保つときに準同型となる：
- 積を保つ：$f(gh) = f(g)f(h)$.
- 単位元を保つ：$f(e) = e'$ (e, e' はそれぞれ G, G' の単位元).
- 逆元を保つ：$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

実際は、このうち積を保っていれば十分であることを示せ。

問題 2 (準同型定理)
群や体、ベクトル空間等数学では様々な代数的構造を考えるため、写像の中でも代数的構造を保つクラス (射) はとりわけ重要な意味を持つ。様々な代数的構造に対して射を導入することができ、そのそれぞれについて準同型定理が成り立つ。準同型定理は代数的構造に普遍的に存在するが、ここではその最も基本的な例として群の準同型定理を示そう。
　G, G' を群とし、準同型写像 $f\colon G \longrightarrow G'$ を考える。以下に従って群の準同型定理

$$G/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f$$

を証明せよ。

(1) $\mathrm{Ker}f = \{g \in G | f(g) = e'\}$ が正規部分群となることを証明せよ。

　従って商群 $G/\operatorname{Ker} f$ が定義できる。
写像 $\tilde{f}\colon G/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ を

$$\tilde{f}(gN) = f(g)$$

により定義する。この時、任意の $n \in N$ に対して $f(gn) = f(g)$ となるため、写像 $\tilde{f}\colon G/\mathrm{Ker}f \longrightarrow \mathrm{Im}f$ は $n \in N$ の取り方によらずに定まり、well-defined である。

(2) $\tilde{f}$ が $\tilde{f}(gh) = \tilde{f}(g)\tilde{f}(h)$ を満たすこと、$\mathrm{Im}f$ が G' の部分群であること、$\tilde{f}$ が全単射であることを証明せよ。

問題 3 (群の元の位数)
群 G の元 g の位数とは、$g^d = e$ をみたす最小の正の整数 d のことである。

(1) g の位数が d のとき、$\{e, g, g^2 \ldots, g^{d-1}\}$ は G の部分群であることを示せ.
(2) g の位数は G の位数の約数であることを示せ。

これを用いて、位数 4 の群が

$$C_4 = \{e, g, g^2, g^3 \mid g^4 = e\},$$
$$C_2^2 = \{e, g, h, gh \mid g^2 = h^2 = e, gh = hg\}$$

のいずれかに同型であることを示そう。

(3) G の位数 4 の元 g が存在するとき、$G = C_4$ であることを示せ。
(4) G の位数 4 の元 g が存在しないとし、e 以外の 2 つの元 g, h をとる。G の元は e, g, h, gh の 4 つであり、$G = C_2^2$ となることを示せ。

問題 4 (巡回群)
位数 n の巡回群 C_n は

$$C_n = \{e, g, \ldots, g^{n-1} \mid g^n = e\}$$

で定まる。

(1) 群の準同型 $f\colon C_n \longrightarrow C_n$ はちょうど n 個あることを示せ。
(ヒント：g が移る先に着目するとよい。)
(2) 群 G は $\{e\}$ ではないとする。G に関する次の 3 つの主張が同値であることを示せ。
(a) G の位数は素数である。
(b) G の部分群は $\{e\}$ と G のみである。
(c) G は C_p (p は素数) と同型である.
(ヒント：$(c) \Rightarrow (a)$ は明らかなので、$(a) \Rightarrow (b)$ と $(b) \Rightarrow (c)$ を示せ。)