物理数学 3　homework 10

2015/1/7

問題 1 (余微分とラプラシアン)

ホッジスター $*$ は、向きの付いた n 次元リーマン多様体 M 上の微分形式に対して定義される。このような多様体は、適切な局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を取ることで、余接空間 $T_p^*(M)$ の内積[*1] $\langle \cdot, \cdot \rangle$ および M の体積要素 dV が

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = \delta^{ij}, \qquad dV = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{1.1}$$

で与えられる。以後、$(x^1, \ldots, x^n)$ はこのような座標系とする。

M 上の k-形式に対して余微分 δ とラプラシアン Δ が

$$*(\delta\omega) = (-1)^k d(*\omega) \tag{1.2}$$

$$\Delta = -(\delta d + d\delta) \tag{1.3}$$

と定義される[*2]。このとき、次の事実を示せ。簡単のため、3 次元であること $(n = 3)$ を仮定してもよい：

(1) $\delta\delta = 0$.

(2) Δ は d および δ のそれぞれと可換である。

(3) 0-形式 f に対して、$\delta f = 0$.

(4) 1-形式 $\alpha = g_i dx^i$ に対して、$\delta\alpha = -\dfrac{\partial g_i}{\partial x^i}$.

(5) 2-形式 $\beta = h_{ij} dx^i \wedge dx^j$ に対して, $\delta\beta = \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} dx^i - \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial x^i} dx^j$.

(6) 0-形式 f に対して、$\Delta f = \displaystyle\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$.

(7) 1-形式 $\alpha = g_i dx^i$ に対して、$\Delta f = \displaystyle\sum_j \frac{\partial^2 f_i}{\partial (x^j)^2} dx^i$.

一般の k-形式に対しても $\Delta = \displaystyle\sum_j \frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2}$ となることが示せる。

問題 2 (ラプラシアンの導出)

M をコンパクトとし、M 全体で定義された k-形式のなすベクトル空間を $\mathcal{A}^k(M)$ で表す[*3]。

[*1] 余接空間の内積は、接空間の内積（講義ノート (7.4) 式）の双対として得られる。

[*2] 通常は $\Delta = \delta d + d\delta$ を採用し、ラプラス-ドラーム演算子とよぶが、ここでは通常のラプラシアンと整合させるため負符号を付した。

[*3] 一般的な記法ではない。

$\eta, \omega \in \mathcal{A}^k(M)$ の内積 $(\eta, \omega)_M$ は

$$(\eta, \omega)_M = \int_M \eta \wedge *\omega \tag{2.1}$$

で定まる。0-形式, 1-形式に対しては

$$(f_1, f_2)_M = \int_M f_1 f_2 dV, \quad (\alpha_1, \alpha_2)_M = \int_M \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle dV \tag{2.2}$$

に一致する（余力があれば確かめよ)。

(1) $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M), \omega \in \mathcal{A}^k(M)$ に対して、$(d\eta, \omega)_M = (\eta, \delta\omega)_M$ を示せ（ヒント：ストークスの定理)。

(2) $\eta, \omega \in \mathcal{A}^k(M)$ に対して、

$$-(\eta, \Delta\omega)_M = (\delta\eta, \delta\omega)_M + (d\eta, d\omega)_M \tag{2.3}$$

となることを示せ。

球面上の極座標 (θ, ϕ) は

$$\langle d\theta, d\theta \rangle = 1, \qquad \langle d\theta, d\phi \rangle = 0,$$
$$\langle d\phi, d\phi \rangle = \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad dV = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$$

であり、式 (1.1) の条件を満たさない。

(3) 0-形式 f, g に対して, 内積 $\langle df, dg \rangle$ を θ, ϕ で表せ。

(4) 球面上の 0-形式に対するラプラシアンを θ, ϕ で表せ。