物理数学 3　homework 3

2015/10/26

問題 1 (対称群の表現)

n 次の対称群 S_n の既約表現は大きさ n のヤング図形に対応する。例えば 4 次の既約表現は

$$\ydiagram{4} \qquad \ydiagram{3,1} \qquad \ydiagram{2,2} \qquad \ydiagram{2,1,1} \qquad \ydiagram{1,1,1,1} \tag{1.1}$$

の 5 つに対応する。簡単に言うと、ヤング図形の表現は「列について反対称化し、行について対称化したもの」となる。これをもうすこし詳しく具体的に追ってみよう。

ヤング図形に 1 から n までの整数を 1 つずつ書きこんだものをヤング盤という。各ヤング盤を基底ベクトルとする表現空間 (既約とは限らない!) を考えることができる。ただし、行に関しては対称化して考え、

$$\begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{ytableau}$$

といったヤング盤は同じ基底ベクトルに対応するように定める。これをヤング図形に対応する行対称表現という。

簡単のため, 例えば $\begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau}$ に対応する基底ベクトルのことを $|134, 25\rangle$ などと書くことにしよう。このとき、$\ydiagram{2,2}$ の行対称表現は 6 次元であり、その基底は以下で表される：

$$\begin{aligned} &e_1 = |12, 34\rangle, \quad e_2 = |13, 24\rangle, \quad e_3 = |14, 23\rangle, \\ &e_4 = |23, 14\rangle, \quad e_5 = |24, 13\rangle, \quad e_6 = |34, 12\rangle \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1) (1.1) 式にある他のヤング図形に対応する行対称表現の次元を求めよ。

(2) (1.2) 式の基底ベクトルにもとづいて、S_4 の元 (2 3) (2 と 3 の互換) の表現行列を求めよ。

対称群の既約表現は、行対称表現を適当な部分空間に制限して得られる。そのための方法が列の反対称化である。ヤング盤 $\begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau}$ の同じ列の数字を入れ替えたものは

$$\begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau}, \qquad \begin{ytableau} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{ytableau}, \qquad \begin{ytableau} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{ytableau}, \qquad \begin{ytableau} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{ytableau} \tag{1.3}$$

の 4 つであるが、このうち奇数回 (偶数回) の互換で得られるものに $-$ $(+)$ の符号を与えることで反対称化を実現できる。この操作を A で表せば

$$\begin{aligned} A \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau} &= |134, 25\rangle - |154, 23\rangle - |234, 15\rangle + |254, 13\rangle \\ &= |134, 25\rangle - |145, 23\rangle - |234, 15\rangle + |245, 13\rangle \end{aligned} \tag{1.4}$$

となる。既約表現の空間は、A により得られるベクトルの張る部分空間として得られる。

(3) $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline\end{array}$ における列の反対称化

$$e'_1 = A\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}, \quad e'_2 = A\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}, \quad e'_3 = A\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

を求めよ。e'_3 は e'_1, e'_2 の一次結合として得られることを確かめよ。

(4) 既約表現の空間は、e'_1, e'_2 を基底とする 2 次元空間となる。この空間における (2 3) および (1 3 4) の表現行列を求めよ。

(5) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$ および $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ はどのような既約表現に対応しているか。

(6) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}$ に対応する既約表現は、原点を中心とする正四面体の頂点を入れ替える線型写像とみなせることを説明せよ (ヒント：行対称表現の基底を、正四面体の頂点の位置ベクトルに対応させる)。