物理数学 3　homework 4

2015/11/2

問題 1 (指数写像)
線型写像 X の指数関数 $F(t) = e^{itX}$ $(t \in \mathbb{R})$ は

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(itX)^k$$

で定義されるが、これは微分方程式

$$\frac{d}{dt}F(t) = iXF(t), \qquad F(0) = I$$

の解としても一意に定まる。

(1) 行列 X がエルミートならば、e^{itX} はユニタリーとなることを証明せよ。
(2) 正方行列 X, Y に関して $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y] = XY - YX$ とする。このとき、$\mathrm{ad}(X)$ は行列から行列への線型写像である。等式

$$e^{it\mathrm{ad}(X)}Y = e^{itX}Ye^{-itX}$$

を示せ (ヒント：$G(t) = e^{itX}Ye^{-itX}$ を解とする微分方程式を考えよ。)

問題 2 (ローレンツ群)
$\mathrm{O}(1,1)$ は空間を 1 次元に制限したローレンツ群であり、ミンコフスキー計量 g を不変にする行列からなる：

$$\mathrm{O}(1,1) = \{X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid M^T g M = g\}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathrm{O}(1,1)$ のリー代数は $e^{itX} \in \mathrm{O}(1,1)$ となる X により生成される。このリー代数はただ 1 つの行列 X から生成されることを示し、X を求めよ。
(2) $e^{i\alpha X}$ を求め、このリー群がコンパクトでないことを確認せよ。
(3) $\mathrm{O}(1,1)$ が 4 つの連結な成分に分かれ、そのうち単位元を含む成分が $\{e^{i\alpha X}\}$ となることを示せ。