物理数学 3　homework 5

2015/11/9

問題 1 ($\mathfrak{su}(2)$ と $\mathrm{SU}(2)$)
リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ はトレースが 0 の 2 次元エルミート行列よりなり、その生成元はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。一般の $\mathfrak{su}(2)$ の元は $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を用いて $\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_k v_k \sigma_k$ と表すことができる。対応 $\boldsymbol{v} \mapsto \sigma(\boldsymbol{v})$ によって、3 次元実空間 $\mathbb{R}^3$ は $\mathfrak{su}(2)$ に対応し、3 次元複素空間 $\mathbb{C}^3$ は複素化された $\mathfrak{sl}(2)$ に対応する。

1. リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の随伴表現 ad は
$$\sigma\big(\mathrm{ad}(X)\boldsymbol{v}\big) = i[X, \sigma(\boldsymbol{v})] \qquad (X \in \mathfrak{su}(2), \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3)$$
を満たす。行列 $\mathrm{ad}(\sigma_x)$ を求めよ。
2. $\mathrm{ad}(X)$ は必ず実対称行列の i 倍であることを示せ。
3. $\mathfrak{su}(2)$ のキリング形式 g_{ij} を求めよ。

$\mathfrak{su}(2)$ をリー代数とするリー群 $\mathrm{SU}(2)$ は、行列式が 1 となる 2 次元ユニタリ行列のなすリー群である。

4. $\mathrm{SU}(2)$ の随伴表現 Ad は
$$\sigma\big(\mathrm{Ad}(U)\boldsymbol{v}\big) = U\sigma(v)U^{-1} \qquad (U \in \mathrm{SU}(2), \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3)$$
を満たす。$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき, $\mathrm{Ad}(U)$ の表現行列を求めよ。
5. $\mathrm{SU}(2)$ の任意の元 U に対して、$\mathrm{Ad}(U)$ の表現行列は直交行列であることを示せ (ヒント：$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\sigma(\boldsymbol{v})\sigma(\boldsymbol{w})]$ が成立する)。
6. $\mathfrak{su}(2)$ の任意の元と可換な行列が単位行列の定数倍に限られることを示せ。このことを用いて、群同型 $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \cong \mathrm{SO}(3)$ を示せ。

問題 2 (メビウス変換)
$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付加したものである。$\hat{\mathbb{C}}$ は 2 次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ と位相同型となり、リーマン球面とよばれる。この同型写像 $\varphi\colon S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ はステレオグラフ写像とよばれ、

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy}$$

で定義される。

正則な 2 次の複素行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、メビウス変換 $f_M \colon \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f_M(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \quad f_M(\infty) = \frac{a}{c}$$

と定める (分母が 0 のとき商は ∞ とする)。

1. メビウス変換の全体は合成写像を積とする群 G をなし, $M \mapsto f_M$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ から G への準同型となることを示せ (ヒント：先に $M \mapsto f_M$ が積を保つことをいうとよい)。
2. 群の同型
$$G \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times I) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$$
を示せ。ただし I は 2 次の単位行列であり、$\mathbb{C}^\times$ は 0 でない複素数のなす群である。

以上の同型に由来して、メビウス変換のなす群 G は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ と表される。さらに、$U \in \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ によるメビウス変換 f_U はリーマン球面の回転に相当し、このことからも $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \cong \mathrm{SO}(3)$ が導かれる。