物理数学 3　homework 6

2015/11/16

問題 1 (不変ベクトル場)

リー群 SU(2) の座標系は、ケーリー・クラインのパラメーター

$$U(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & ie^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ ie^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

で定められることが多い。

(1) リー代数を i 倍したものは、リー群の単位元における接ベクトル空間に等しい。単位元 $(e=U(0,0,0))$ において、接ベクトル $\frac{\partial}{\partial\beta}$ に対応する $\mathfrak{su}(2)$ の元をパウリ行列で表せ。パウリ行列は以下の通りである：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 接ベクトル $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, $\frac{\partial}{\partial\gamma}$ が線型独立であるとき、この座標系は正則となる。座標系が正則となるための α,β,γ の条件を求めよ。

(3) $V_e=i\sigma_z$ となるような左不変ベクトル場 V を考える。$g=U(\alpha,\beta,\gamma)$ における接ベクトル V_g を $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, $\frac{\partial}{\partial\gamma}$ の線形結合で表せ。右不変ベクトル場についても同様のものを計算せよ。

次のページに続きます。

問題 2 (ノンコンパクト群の不変体積)
局所コンパクト群 G における体積 dg が、積分可能な任意の関数 f に対して

$$\int_G f(g_0 g)dg = \int_G f(g)dg \tag{2.1}$$

を満たすとき、$\int dg$ は左不変であるという。局所コンパクト群に対する左不変な体積 dg_L は必ず存在し、定数倍を除いて一意となる。

(1) $g_1 \in G$ に対して、正の実数 $\Delta(g)$ が存在して

$$\int_G f(gg_1)dg_L = \Delta(g_1)\int_G f(g)dg_L$$

となることを示せ (ヒント：$d(g_L g_1^{-1})$ という体積を考える。)

(2) Δ は G から乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への群準同型であることを示せ。

Δ は右不変体積と左不変体積の差異を表し、モジュラー指標とよばれる。
1 次元のアフィン変換群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ は

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\, y \neq 0 \right\} \tag{2.2}$$

により定義される。群の演算は行列の積である。

(3) $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ の左不変体積、右不変体積、モジュラー指標を求めよ。結果は $f(x,y)dxdy$ あるいは $f(x,y)$ の形で表せ。