物理数学 3　homework 7

2015/11/30

1　第 7 章

問題 1 (外積の性質)

この問題において、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ はすべて 1-形式とする。外積 $\wedge$ は $\alpha_i \wedge \alpha_j = -\alpha_j \wedge \alpha_i$ を満たす。

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ のうち 2 つが一致するとき、$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r = 0$ となることを示せ。

(2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ が線型従属のとき、$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r = 0$ となることを示せ。

(3) $\eta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$, $\omega = \alpha_{r+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{r+s}$ に対して $\eta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \eta$ を示せ。

問題 2 (外微分の性質)

授業における外微分の定義が、座標系のとり方によらないことを示そう。まず, r-形式は、r 個のベクトル場に対して定義される完全反対称な線型写像として定義される。例えば、1-形式 α_1, α_2 に対して

$$\alpha_1(X_1) = \langle \alpha_1, X_1 \rangle \tag{2.1}$$

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2)(X_1, X_2) = \langle \alpha_1, X_1 \rangle \langle \alpha_2, X_2 \rangle - \langle \alpha_1, X_2 \rangle \langle \alpha_2, X_1 \rangle \tag{2.2}$$

となる。

(1) ベクトル場は、スカラー場（すなわち 0-形式）に対して微分演算子として働いたことを思い出そう。0-形式から 1-形式への線型写像 d_0 を

$$(d_0 f)(X) = Xf \tag{2.3}$$

で定める。このような d_0 が、0-形式に対する外微分 d に一致することを（適当な座標系で）示せ。このことから、0 形式の外微分は座標系によらず定まることがいえる。

(2) 1-形式から 2-形式への線型写像 d_1 を

$$(d_1 \alpha)(X_1, X_2) = X_1[\alpha(X_2)] - X_2[\alpha(X_1)] - \alpha([X_1, X_2]) \tag{2.4}$$

により定める（$\alpha(X_1)$ などはスカラー場であることに注意）。このような d_1 が、1-形式に対する外微分 d に一致することを示せ（ヒント：線型性より、$\alpha = h dx^j$ と表せる場合に示せば十分である）。

なお、一般の r-形式に対しても、(2.3) や (2.4) と同様に、座標によらない形で d_r を書き下

すことができるが、やや複雑になる：

$$
\begin{aligned}
(d_r\omega)(X_1,\ldots,X_{r+1}) &= \frac{1}{(r+1)!}\sum_{\sigma\in S_{r+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\widetilde{\omega}(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r+1)}), \qquad (2.5)\\
\widetilde{\omega}(Y_1,\ldots,Y_{r+1}) &= (r+1)Y_1[\omega(Y_2,\ldots,Y_{r+1})]\\
&\quad + \frac{r(r+1)}{2}\omega([Y_1,Y_2],Y_3,\ldots,Y_{r+1}).
\end{aligned}
$$

この表式を用いると、抽象的なリー代数に対しても外微分を定義することができる。これは、リー代数の構造を研究する上で重要となる。