物理数学3 (上田正仁) 中間試験 (試験時間：105 分)

2014/12/14

問題 1 から問題 5 全てに解答せよ。問題に不備、条件不十分な点等があると思われる場合は、どの点をどのように修正、解釈したかを明記した上で、その修正、解釈の下で解け。

解答用紙は 1 枚である。用紙の裏面も用いてよい。

遅刻は試験開始後 30 分までである。試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1 (群と準同型)

群は積 (結合積)、単位元、逆元で特徴づけられる代数構造である。

(1) 積、単位元、逆元のそれぞれについて説明せよ。

(2) 群 G から群 G' への写像 $f\colon G \longrightarrow G'$ は、群の代数構造を保つときに準同型となる：

(a) 積を保つ：$f(gh) = f(g)f(h)$.

(b) 単位元を保つ：$f(e) = e'$ (e, e' はそれぞれ G, G' の単位元).

(c) 逆元を保つ：$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

実際は (a) のみで十分であることを示せ。すなわち、(a) を満たしていれば (b), (c) も自動的に満たされることを示せ。

問題 2 (二面体群)

二面体群 D_6 は $\rho^6 = \tau^2 = 1, \tau\rho = \rho^{-1}\tau$ を満たす ρ, τ で生成される群である。

D_6 の位数は 12 であり、以下のように表せる：

$$D_6 = \{\rho^a \tau^b \mid 0 \le a \le 5,\, b = 0, 1\}. \tag{2.1}$$

(1) D_6 の共役類をすべて求めよ (答のみでよい)。

(2) A_1, A_2, B_1, B_2 はいずれも D_6 の 1 次元表現であり、下記の表により定まる：

R	A_1	A_2	B_1	B_2
$R(\rho)$	1	1	-1	-1
$R(\tau)$	1	-1	1	-1

(2.2)

D_6 の残りの既約表現が 2 個であり, それらはすべて 2 次元であることを導け。

D_6 の 2 次元既約表現は、いずれも ρ を回転, τ を鏡映に対応させるものである。ρ が 1/6 回転となる方を E_1, 2/6 回転となる方を E_2 とする。

(3) E_1 と E_2 の指標を求め、D_6 の指標表を作成せよ (答のみでよい)。

(4) E_1 および E_2 が既約であることを確かめよ。

(5) D_6 の 3 次元表現 T を以下で定める：

$$T(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

これを既約表現に分解し、不変部分空間を求めよ。

問題 3 (メビウス変換)

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付加したものである。$\hat{\mathbb{C}}$ は 2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と位相同型となり、リーマン球面とよばれる。この同型写像 $\varphi\colon S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ はステレオグラフ写像とよばれ、

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy} \tag{3.1}$$

で定義される。ただし、$\hat{\mathbb{C}}$ においては 0 でない複素数を 0 で割った商は ∞ であるとする。

正則な 2 次の複素行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、メビウス変換 $f_M\colon \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f_M(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \quad f_M(\infty) = \frac{a}{c} \tag{3.2}$$

と定める (分母が 0 のとき商は ∞ とする)。

(1) メビウス変換の全体は合成写像を積とする群 G をなし, $M \mapsto f_M$ は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ から G への準同型となることを示せ。

(2) 群の同型

$$G \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} \tag{3.3}$$

を示せ。ただし I は 2 次の単位行列である。

問題 4 (ノンコンパクト群の不変体積)

局所コンパクト群 G における体積 dg が、積分可能な任意の関数 f に対して

$$\int_G f(g_0 g) dg = \int_G f(g) dg \tag{4.1}$$

を満たすとき、$\int dg$ は左不変であるという。局所コンパクト群に対する左不変な体積 dg_L は必ず存在し、定数倍を除いて一意となる。

また、各 $g_1 \in G$ に対して、正の実数 $\Delta(g_1)$ が存在して

$$\int_G f(g g_1) dg_L = \Delta(g_1) \int_G f(g) dg_L \tag{4.2}$$

となり、Δ を G のモジュラー指標という。

(1) Δ は G から乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への群準同型であることを示せ。

1 次元のアフィン変換群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ は

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\, x \neq 0 \right\} \tag{4.3}$$

により定義される。群の演算は行列の積である。

(2) $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ の左不変体積、右不変体積、モジュラー指標を求めよ。結果は x, y を用いて表せ。

問題 5 (ボゴリューボフ変換)

行列 M に対して、$\bar{M}$ で M の各成分の複素共役を取ったものを表し、M^T で M の転置行列、$M^\dagger$ で M のエルミート共役を表す。ボソンの消滅演算子 $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n$ のボゴリューボフ変換は

$$\hat{b}_i = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij}\hat{a}_j + B_{ij}\hat{a}_j^\dagger) \tag{5.1}$$

という形をとる。ボゴリューボフ変換全体のなす群を調べよう。

(1) $\hat{\boldsymbol{a}}^T = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{a}_1^\dagger, \ldots, \hat{a}_n^\dagger)$, $\hat{\boldsymbol{b}}^T = (\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n, \hat{b}_1^\dagger, \ldots, \hat{b}_n^\dagger)$ とおくと、ボゴリューボフ変換は $\hat{\boldsymbol{b}} = U\hat{\boldsymbol{a}}$ と表せる。$2n$ 次正方行列 U を n 次正方行列 A, B で表せ。

(2) ボソンの正準交換関係は、$2n$ 次元の数ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を用いて

$$[\boldsymbol{y}^T\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{y}^T G \boldsymbol{x} \tag{5.2}$$

と表せる。G を求めよ。

(3) 変換行列 U が正準交換関係を保つための条件を G を用いて表せ。

(4) $U = \exp(itX)$ となる X（群の生成元）の条件を調べることで、ボゴリューボフ変換全体のなすリー群の次元を求めよ。また、$n = 1$ のときの生成元を 1 組書き下せ。

(5) フェルミオンのボゴリューボフ変換の場合、U は正準反交換関係を保つ必要がある。このときのリー群の次元を求めよ。

問題 6 (授業に関して)

この問題の回答内容によって成績評価が左右されることはありません。

(1) homework をいつ解いていますか？

(ア) 毎週アップロードされたらすぐに解いている

(イ) テスト前にまとめて解いている　(ウ) 解いていない

(2) homework の難易度について

(ア) 難しすぎる　(イ) ちょうど良い　(ウ) やさしすぎる　(エ) 問題が良くない

(3) 授業や homework について要望や改善点など率直な意見を聞かせてください。