物理数学3　homework 1

2016/9/26

1　群と元の位数

(1) 位数が n の有限群 G の任意の元 g に対して、$g^k = e$(G の単位元) を満たす $k \in \{1, 2, ..., n\}$ の存在性を示せ。(ヒント：鳩の巣原理を使えばよい。注釈：この命題によって、$g^k = e$ を満たす最小の自然数 k として定義される元の位数は well-defined である。)
(2) g の位数 k は常に G の位数 n の約数であることを示せ。
(3) n は素数の場合、G は巡回群であることを証明せよ。
(4) n は偶数の場合、G は位数が 2 の元を持つことを証明せよ。(ヒント：背理法を使えばよい。)

2　準同型定理

群や体、ベクトル空間等数学では様々な代数的構造を考えるため、写像の中でも代数的構造を保つクラス (射) はとりわけ重要な意味を持つ。様々な代数的構造に対して射を導入することができ、そのそれぞれについて準同型定理が成り立つ。準同型定理は代数的構造に普遍的に存在するが、ここではその最も基本的な例として群の準同型定理を示そう。

G, G' を群とし、準同型写像 $f : G \to G'$ を考える。以下の誘導に従って、群の準同型定理

$$G/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f \tag{1}$$

を証明せよ。
(1) $N := \mathrm{Ker}f = \{g \in G | f(g) = e'\}$($e'$：$G'$ の単位元) が正規部分群となることを証明せよ。
従って商群 $G/\mathrm{Ker}f$ が定義できる。写像 $\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ を

$$\tilde{f}(gN) := f(g) \tag{2}$$

により定義する。この時、任意の $n \in N$ に対して $f(gn) = f(g)$ となるため、写像 $\tilde{f}$ は $n \in N$ の取り方によらずに定まり、well-defined である。
(2) $\tilde{f}$ が $\tilde{f}(gh) = \tilde{f}(g)\tilde{f}(h)$ を満たすこと、$\mathrm{Im}f$ が G' の部分群であること、$\tilde{f}$ が全単射であることを証明せよ。

3　ポーヤの計数定理

このような計数問題を考えよう：m 種類の色を使って n 点の集合 V を染める時、異なった染め方はいくつあるのか？もし V は対称性を全く持たないければ、答えは m^n ってことが簡単に分かる。しかし、V に高い対称性を課すと、異なった結果が少なくなり、計数問題は非自明になる。例として、このような問題が考えられる：

(∗) 二色で立方体の頂点を染める時、異なった染め方はいくつあるのか？

実際、対称性を群 G で定量的に表わし、G の性質を詳しく調べれば、ポーヤの計数定理 (Pólya enumeration theorem) によって (∗) ような計数問題が系統的に解決できる。これから、誘導に従って、一般的な計数公式 (6) を導出し、それを用いて (∗) を解決せよ。

ある有限集合 X に対して、有限群 G の元は全て X 上の射であり、群作用 $g : X \to X,\ x \mapsto g \cdot x$ が定義できる。よって、任意の $x \in X$ に対して軌道 (orbit)$G(x) := \{g \cdot x | g \in G\} \subseteq X$ と固定群 (stabilizer)$G_x := \{g | g \cdot x = x\} \leq G$、任意の $g \in G$ に対して固定点集合 $X^g := \{x | g \cdot x = x\} \subseteq X$ が定義できる。
(1) 同じ軌道に属するのは同値関係であることや G_x は G の部分群であることを示せ。
(2) G_x の剰余類から $G(x)$ への全単射を作り、軌道・固定群定理 (orbit-stabilizer theorem)

$$[G : G_x] = |G(x)| \tag{3}$$

を証明せよ。
(3) フビニの定理 (Fubini's theorem)[1] を使って、恒等式

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g| \tag{4}$$

を導出せよ。
(4) 小問 (1) によって、X はいくつ重なりのない軌道に分解できて、軌道の数は well-defined であり、$|X/G|$ と書こう。小問 (2) と (3) によって、バーンサイドの補題 (Burnside's lemma)

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \tag{5}$$

を証明せよ。
(5) X は彩った点集合 V のなす集合である状況を考えよう。色集合を C と書けば、$X := C^V$ と $|C| = m$ であることが分かる。詳しく書くと、$X = \{f | f : V \to C,\ v \mapsto f(v)\}$ であり、$g \cdot f(v) = f(g^{-1}v)$ の性質を用いて、$X^g = \{f | f(v) = f(g^{-1}v)\}$ であることが分かる。これによって、バーンサイドの補題 (5) からポーヤの計数定理

$$|C^V/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\lambda(g)} \tag{6}$$

を導け。ただし、$\lambda(g)$ は g の V 上の置換操作としてサイクルの数。例えば $V = \{1, 2, 3\}$、$g = (1, 2)$ の場合 $\lambda(g) = 2$ である。
(6) ポーヤの計数定理 (6) を立方体の対称群 (点群 O) にあてはめることで、(∗) の問いに答えよ。その結果が直接に数えあげる方法で得られた結果と一致することを確かめよ。

[1] フビニの定理とは、二重積分/二重和を計算するとその結果が積分の/和を取る順番によらないこと。