

物理数学3 homework 10

2016/12/12

1 磁性気体の熱力学

磁性気体のエネルギー、圧力、体積、磁化、磁束密度をそれぞれ E, p, V, M, B とすると、準静的断熱過程は

$$\omega = dE + pdV + MdB = 0 \quad (1)$$

で表せる。¹ ここで、 p, M は E, V, B の微分可能関数である。

(1) 1-形式 ω が積分可能となる条件を書き下せ。

(2) 小問(1)の条件が満たされると $\omega = TdS$ で書くことができる。この時、 V が一定の部分空間で $F = E - TS$ に対して2回外微分をとることで Maxwell の関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{B,V} \quad (2)$$

を導出せよ。

(3) 圧力と磁化が

$$p = \frac{E + \sqrt{E^2 + 4\alpha N^2 m_0^2 B^2}}{2\alpha V}, \quad M = \frac{-E + \sqrt{E^2 + 4\alpha N^2 m_0^2 B^2}}{2B} \quad (3)$$

で与えられる時、小問(1)の条件が満たされていることを示せ。ここで、 α, N は無次元の定数であり、 m_0 は磁化の次元を持つ定数である。

(4) 式(3)は二つの内部準位 ($E_{\uparrow, \downarrow} = \mp m_0 B$) を持つ高温理想気体と対応している。この事実をヒントにして、 ω を完全微分にするために必要な積分因子の逆数 $T(E, V, B)$ を求めよ。

2 永久電流

図1のような周長 L の一次元リングの中心にリングの平面と垂直の方向に強さ Φ の磁束をかけると、リング上電荷 q の粒子の固有波動関数はシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} - i \frac{2\pi}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad (4)$$

に従うことが分かる。ここで、 $\Phi_0 = \frac{h}{q}$ は磁束量子である。

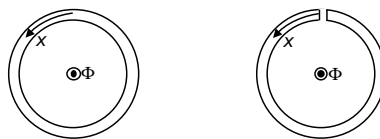


図1 内側に磁束が印加されている導体のリング。左側は周期的境界、右側は開境界である。

¹ここでは高温極限を考て、 M が小さいために $\mu_0 M dH$ と $M dB$ の違いは無視できるものとする。

- (1) 周期的境界条件 $\psi(x) = \psi(x + L)$ の下で全ての固有エネルギーを求め、エネルギースペクトラムが Φ に対して周期的に変化することを示せ。
- (2) 開境界条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ の下で全ての固有エネルギーを求め、エネルギースペクトラムが Φ によらないことを示せ。
- (3) 空間の連結性とポテンシャルの存在条件に基づいて小問 (1) と (2) の結果が異なっていることを説明せよ。
- (4) 粒子をスピンレスフェルミオンと仮定し、ゼロ温度での N 粒子リングシステム (周期的境界条件) のエネルギー $E = \sum_{n=1}^N E_n$ (基底から N 番目励起までのエネルギーの和) を求めよ。
- (5) リングシステムの平衡状態は熱力学等式 $dE = TdS - Id\Phi - FdL$ を満たし、従って、 $I = -\frac{\partial E}{\partial \Phi}$ により永久電流 (persistent current) が計算できる。小問 (4) の結果を用いて、ゼロ温度での永久電流は

$$I(\Phi) = \begin{cases} -2I_0 \frac{\Phi}{\Phi_0}, & N \text{ は奇数, } -\frac{1}{2} < \frac{\Phi}{\Phi_0} < \frac{1}{2} \\ -2I_0 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{1}{2} \right), & N \text{ は偶数, } 0 < \frac{\Phi}{\Phi_0} < 1 \end{cases}$$

であることを確かめよ。ここで、 $I(\Phi + \Phi_0) = I(\Phi)$, $I_0 = \frac{qv_F}{L}$, $v_F = \frac{N\hbar}{2mL}$ である。²

²興味があったら永久電流の実験に関する参考文献 Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990)(銅); Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991)(金); Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993)(半導体) を読んでみてください。