物理数学3　homework 11

2016/12/19

1　アクシオンのあるマクスウェル方程式

アキシオン (axion) とは、素粒子理論において、強い相互作用を記述する量子色力学に関連している仮説上の素粒子である。電磁場とアキシオン共存する自由空間のラグランジアン密度は

$$4\pi\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right) + \frac{1}{2}[(\partial_t\theta)^2 - (\nabla\theta)^2 - m_a^2\theta^2] + \kappa\theta\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{1}$$

のように表せる。ここで、$4\pi\epsilon_0 = c = \hbar = 1$ とし[1]、θ, m_a, κ はそれぞれアキシオン場、アキシオンの質量、アキシオン-電磁場カップリングの強さである。
(1) $\mathcal{L}$ を微分形式 ω_{em} と $d\theta$ で書き換えることでシステムのローレンツ不変性を確かめよ。[2] ここで、$\omega_{em} := -iE_i dx^i \wedge dx^4 + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}B_i dx^j \wedge dx^k (x^4 := it,\ i,j,k \in \{1,2,3\})$ である。
(2) 変分法によりアクシオンのあるマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E} = -\kappa\nabla\theta\cdot\mathbf{B}, \quad &&\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ &\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, &&\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \kappa\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla\theta\times\mathbf{E}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

及びアクシオンの運動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m_a^2\right)\theta = -\kappa\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{3}$$

を導出せよ。
(3) 微分形式で書くとアクシオンのあるマクスウェル方程式は

$$d(*\omega_{em} + \kappa\theta\omega_{em}) = 0, \quad d\omega_{em} = 0 \tag{4}$$

となることを示せ。

[1] $\hbar$ が現れたが、ここではクラシカルな場の理論を考える。
[2] 物理法則を微分形式で書くことは、その物理法則が座標系（すなわち、観測者の味方）によらないことを意味する。したがって、ラグランジアンがミンコフスキー空間上での微分形式で書かれていることは、それがローレンツ不変であることを示していることに注意せよ。

2　水素分子イオンの波動関数

水素分子イオン H_2^+ は数少ない解析的に扱える量子系の一つである。図 1 のように、ボルン-オッペンハイマー近似 (Born-Oppenheimer approximation) の下で二つの原子核の位置をそれぞれ z 軸上の $A=(0,0,-D/2)$,$B=(0,0,D/2)$ に固定すると、電子 e の固有波動関数はシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{m_e}\left[\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\right]\psi=E\psi \tag{5}$$

で定めることが分かる。ここで、m_e は電子の質量であり、$a_0:=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ はボーア半径である。

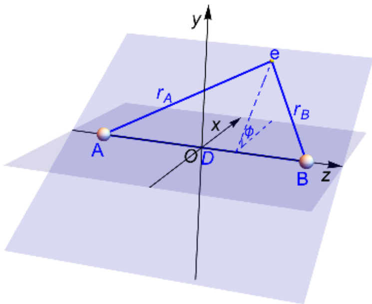

図 1 H_2^+ 分子イオンにおける各パラメーター。

(1) シュレーディンガー方程式 (5) を解くために図 1 で示したような楕円座標 ($\xi:=\frac{r_A+r_B}{D}$, $\eta:=\frac{r_A-r_B}{D},\phi$) が便利である。デカルト座標 (x,y,z) と楕円座標 (ξ,η,ϕ) は

$$x=\frac{D}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\phi,\quad y=\frac{D}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\phi,\quad z=\frac{D}{2}\xi\eta \tag{6}$$

で結びついていることを示せ。
(2) 講義ノートでは任意の曲線座標 (u^1,u^2,u^3) に適用する一般的なラプラシアンの公式

$$\nabla^2=\frac{1}{g_1g_2g_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{g_2g_3}{g_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{g_3g_1}{g_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{g_1g_2}{g_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right] \tag{7}$$

を示した。ここで、$g_i:=\sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\right)^2}$ である。小問 (1) の結果 (6) を式 (7) に当てはめることで楕円座標でのラプラシアン

$$\nabla^2=\frac{4}{D^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]+\left[\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \tag{8}$$

を導出せよ。
(3) 楕円座標の下で $\psi(\xi,\eta,\phi)=R(\xi)S(\eta)e^{im\phi}(m\in\mathbb{Z})$ のような変数分離が可能となり、シュレーディンガー方程式 (5) は常微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi}R\right]+\left[\frac{2D}{a_0}\xi+\frac{m_eED^2}{2\hbar^2}\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2-1}-\Lambda\right]R=0,\\&\frac{d}{d\eta}\left[(\eta^2-1)\frac{d}{d\eta}S\right]+\left[\Lambda-\frac{m^2}{1-\eta^2}-\frac{m_eED^2}{2\hbar^2}\eta^2\right]S=0\end{aligned} \tag{9}$$

に変形できることを示せ。ここで、Λ は未定定数である。