物理数学3　homework 5

2016/10/31

1　ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの公式

群の元の結合は必ず群の元である。この性質をリー代数 W に対応するリー群 G に当てはめると、任意の $X, Y \in \mathrm{W}$ に対して $e^{iZ} = e^{iX}e^{iY}$ を満たす $Z \in \mathrm{W}$ が存在しなければならない。実際、W がリー代数であれば、Z はベーカー・キャンベル・ハウスドルフ (Baker-Campbell-Hausdorff)[1] の公式

$$Z = X + \int_0^1 dt f(e^{i\mathrm{ad}(X)}e^{it\mathrm{ad}(Y)})Y \tag{1}$$

で求められる。ここで、$f(\zeta) = \frac{\ln\zeta}{1-\zeta^{-1}} (\zeta \in \mathbb{C})$ は $|\zeta - 1| < 1$ 内の正則関数であり、$\mathrm{ad}(X)$ は W 上の線形写像 $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ である。

(1) 等式 $e^{i\mathrm{ad}(X)}Y = e^{iX}Ye^{-iX}$ を示せ。

(2) $e^{iZ} = e^{iX}e^{iY}$ を仮定する時、等式 $e^{i\mathrm{ad}(Z)} = e^{i\mathrm{ad}(X)}e^{i\mathrm{ad}(Y)}$ を示せ。

(3) 連続的なパラメーター $t \in \mathbb{R}$ に依存する $Z(t) \in \mathrm{W}$ に対して、$F(\lambda, t) = e^{-i\lambda Z(t)}\partial_t e^{i\lambda Z(t)}$[2] を定義する。$\partial_\lambda F(\lambda, t)$ を求め、その結果を偏微分方程式とみなして解くことで、等式

$$\frac{d}{dt}e^{iZ(t)} = e^{iZ(t)}\frac{1-e^{-i\mathrm{ad}(Z(t))}}{\mathrm{ad}(Z(t))}\frac{d}{dt}Z(t) \tag{2}$$

を示せ。これはデュアメル (Duhamel) の公式と呼ばれている。

(4) $e^{iZ(t)} = e^{iX}e^{itY}$[3] をデュアメルの公式 (2) に当てはまることで、ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの公式 (1) を導出せよ。

(5) $\mathrm{ad}(X)$ と $\mathrm{ad}(Y)$ を小さい量とする時、$f(\zeta)$ を $\zeta = 1$ 付近展開し、二次項までの近似は

$$Z = X + Y + \frac{i}{2}[X, Y] - \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + O(\mathrm{ad}^3(X), \mathrm{ad}^3(Y)) \tag{3}$$

であることを確かめよ。

2　マグナス展開と回転波近似

時間に依存するハミルトニアン $H(t)$ を持つ量子系の時間発展演算子 $U(t, 0)$ は、シュレーディンガー方程式 $i\frac{d}{dt}U(t, 0) = H(t)U(t, 0)$ に従い、下のようなダイソン級数 (Dyson series) で表せる。

$$U(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_0^{t_2} dt_1 H(t_n)H(t_{n-1}) \ldots H(t_1) \tag{4}$$

[1] 1 月 3 日訂正箇所
[2] 1 月 3 日訂正箇所
[3] 12 月 12 日訂正箇所

一方、$U(t,0)$ を $e^{-i\Omega(t)}$ と書き換えると、$\Omega(t)$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n(t)$ で展開でき、三次までの低次項は

$$\begin{aligned} &\Omega_1(t) = \int_0^t dt_1 H(t_1), \qquad\qquad \Omega_2(t) = -\frac{i}{2}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 [H(t_2), H(t_1)], \\ &\Omega_3(t) = -\frac{1}{6}\int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 ([H(t_3),[H(t_2),H(t_1)]] + [H(t_1),[H(t_2),H(t_3)]]) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。これはマグナス展開 (Magnus expansion) という。
(1) $Z(t) = -\Omega(t)$ をデュアメルの公式 (2) に当てはめることで、等式

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) = f(e^{i\mathrm{ad}(\Omega)})H(t), \tag{6}$$

を示せ。ここで、$f(\zeta)$ は問題 1 での $f(\zeta)$ と一致する。
(2) $f(\zeta)$ を $\zeta = 1$ 付近展開することで、摂動的に微分方程式 (6) を解け、マグナス展開の低次項が式 (5) となることを確かめよ。（ヒント：ヤコビの恒等式は役に立つ。）

応用として、二準位原子と古典レーザーの相互作用のハミルトニアン

$$H_0(t) = \frac{1}{2}\omega_A\sigma_z + \omega_R\sigma_x\cos\omega_L t \tag{7}$$

を考えよう。ここで、σ_μ はパウリ行列であり、$\omega_A, \omega_R, \omega_L$ はそれぞれ原子準位のエネルギー差、ラビとレーザー周波数である。基底を時間に依存するユニタリ演算子 $U_{\mathrm{I}}(t) = e^{i\omega_L\sigma_z t/2}$ で変換し、回転座標系 (rotating frame) でのハミルトニアン $H(t) = U_{\mathrm{I}}(t)H_0(t)U_{\mathrm{I}}^\dagger(t) + i\dot{U}_{\mathrm{I}}(t)U_{\mathrm{I}}^\dagger(t)$ は

$$H(t) = \frac{1}{2}(-\Delta\sigma_z + \omega_R\sigma_x) + \frac{1}{2}\omega_R(\sigma_+ e^{2i\omega_L t} + \sigma_- e^{-2i\omega_L t}) \tag{8}$$

となる。ここで、$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ であり、$\Delta = \omega_L - \omega_A$ はレーザーのデチューニングである。$T = \frac{2\pi}{\omega_L}$ とし、式 (8) のハミルトニアンに対して、$H_1 = \frac{1}{T}\Omega_1(T) = \frac{1}{2}(-\Delta\sigma_z + \omega_R\sigma_x)$ であることが簡単に分かる。
(3) 式 (8) のハミルトニアンに対して、$H_2 = \frac{1}{T}\Omega_2(T)$ を求め、$\omega_L \gg \Delta, \omega_R$ の場合 $H_2 \ll H_1$ であることを確かめよ。[4]

[4]回転波近似とは、$H(t)$ のフロケハミルトニアン (Floquet Hamiltonian)$H_{\mathrm{F}} = \frac{1}{T}\Omega(T)$ を H_1 に近似すること。