物理数学3　homework 6

2016/11/7

1　カシミール元

リー代数 $\mathrm{W} = \{X_i\}$ の構造定数を f_{ijk} とし、カルタン計量を $g_{ij} = f_{ikl}f_{jlk}$ と定義する。g_{ij} の逆行列 g^{ij} の存在を仮定すると、W のカシミール元 (Casimir element)C は

$$C = g^{ij}X_iX_j \tag{1}$$

のように定義することができる。
(1) 構造定数 f_{ijk} の反対称性 $f_{ijk} = -f_{jik}$ を使って、任意の k に対して

$$g^{il}f_{lkj} + g^{jl}f_{lki} = 0 \tag{2}$$

が成り立つことを示せ。
(2) 小問 (1) の結果と恒等式 $[XY, Z] = [X, Z]Y + X[Y, Z]$[1] を使って、カシミール元 C はリー代数の全ての元と可換すること[2](つまり、$[C, X] = 0,\ \forall X \in \mathrm{W}$) を示せ。

例として、リー代数 $\mathrm{W} = \{1, x, p, H = p^2 + x^2, L = p^2 - x^2, S = xp + px\}$ を考えよう。ここで、正準交換関係 $[x, p] = i$ に基づいて全ての交換関係が計算できる。
(3) リー代数 $\mathrm{K} = \{1, x, p\}$ は W の不変部分代数であり、$\mathrm{K}' = \{H, L, S\}$ は W の不変でない部分代数であることを確かめよ。
(4) リー代数 K' のカルタン計量 g_{ij} を求め、K' がコンパクトでないことを示せ。
(5) リー代数 K' のカシミール元 C を H, L, S で表せ。

2　SU(2) と SO(3)

リー群 SU(2) は SO(3) の普遍被覆であり、同型関係

$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \simeq \mathrm{SO}(3) \tag{3}$$

が成立する。ここで、I は SU(2) の単位元である。$\{\pm I\}$ が現れる理由については、物理的に簡単な解釈が可能である：スピン 1/2 を任意の軸に対して 2π 回転すると波動関数は符号を変えるが、対応する三次元実空間の回転は恒等操作となる。従って、二つのスピン 1/2 の同時回転が三次元実空間の回転と 1 対 1 で対応することが予想できる。以下、このアイディアに基づき、式 (3) を示せ。

[1]厳密に言えば、普通の抽象リー代数に対して掛け算が定義されていない。ここでは、掛け算が定義され、リー代数の普遍包絡代数ということを考えている。
[2]12 月 12 日訂正箇所

リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ から $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$[3] への線形写像 $\phi(X) = X \otimes I + I \otimes X$ を考えよう ($\otimes$：テンソル積[4])。従って、リー群 $\mathrm{SU}(2)$ から $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$[5] への線形写像 $\Phi(e^{iX}) = e^{i\phi(X)}$ が定義できる。物理的に、e^{iX} を一つのスピン 1/2 の回転とみなせば、$e^{i\phi(X)}$ は二つのスピン 1/2 の同時回転となる。
(1) Φ が準同型写像であることを示せ。
(2) 準同型定理を使って、同型関係

$$\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \simeq \mathrm{Im}\Phi \tag{4}$$

を示せ。
(3) $\mathrm{Im}\phi$ の基底を $\phi(\sigma_\mu)$ とし ($\mu = x, y, z,\ \sigma_\mu$：パウリ行列)、射影演算子 P を

$$P = \frac{3}{4} I \otimes I + \frac{1}{4} \sum_{\mu=x,y,z} \sigma_\mu \otimes \sigma_\mu \tag{5}$$

[6]

と定義する。$P^2 = P$ と $P\phi(\sigma_\mu) = \phi(\sigma_\mu)P = \phi(\sigma_\mu),\ \forall \mu = x, y, z$ であることを確かめよ。この結果によって、$\mathrm{Im}\Phi$ は多くても $\mathrm{Tr}[P] = 3$ 次元ヒルベルト空間上の非自明操作しか含まないことが分かる。
(4) σ_z の固有状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ とし、二つのスピンの三重項状態 (triplet state) に属するベル状態 (Bell state) は

$$|T_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad |T_y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad |T_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{6}$$

で定義される。実際、小問 (3) での射影演算子 P は $\sum_{\mu=x,y,z} |T_\mu\rangle\langle T_\mu|$ にほかならない。式 (6) で示されたベル状態を P で射影されたヒルベルト空間の基底とし、$\phi(\sigma_\mu)$ の行列要素を計算することで、同型関係

$$\mathrm{Im}\Phi \simeq \mathrm{SO}(3) \tag{7}$$

が成立することを示せ。式 (4) と (7) により、式 (3) が成立することが分かる。

[3] 12 月 12 日訂正箇所
[4] 12 月 12 日訂正箇所
[5] 12 月 12 日訂正箇所
[6] 12 月 12 日訂正箇所