物理数学3　homework 7

2016/11/14

1　SU(1,1) リー群：不変ベクトル場と不変体積

SU(1,1) リー群の元は

$$g(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2} & e^{\frac{i}{2}(\varphi-\psi)}\sinh\frac{r}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}\sinh\frac{r}{2} & e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2} \end{pmatrix}$$

と表現することできる。この事実を利用して次の設問に答えよ。
(1) SU(1,1) リー群多様体上の曲線 $g(t,0,0), g(0,t,0), g(t,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ に対して、$t=0$ 点における接ベクトルに対応する $\mathfrak{su}(1,1)$ リー代数の元をパウリ行列で表せ。（ヒント：SU(1,1) はノンコンパクトなので、$\mathfrak{su}(1,1)$ リー代数の元はエルミートとは限らない。）
(2) $\mathfrak{su}(1,1)$ リー代数の交換関係を求めることで、$\mathfrak{su}(1,1)$ は homework 6 で現れた $K'=\{p^2+x^2, p^2-x^2, xp+px\}([x,p]=i)$ と同型であることを示せ。
(3) $V_e=\sigma_x$ とし、任意の $g(r,\varphi,\psi)$ に対して左不変ベクトル場 V_g^L を求めよ。
(4) SU(1,1) リー群は $G=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{C},|\alpha|>|\beta|\right\}$ の部分群である。G の不変体積が

$$(|\alpha|^2-|\beta|^2)^{-2}d\alpha d\bar\alpha d\beta d\bar\beta \tag{1}$$

であることを示せ。
(5) G 上の積分を SU(1,1) に落とす場合、式 (1) に因子 $\delta(|\alpha|^2-|\beta|^2-1)$ を加えば良い。また、G の元の座標を $\alpha=ue^{\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2}, \beta=ue^{\frac{i}{2}(\varphi-\psi)}\sinh\frac{r}{2}(u>0)$ のように書き換えることができる。これらのことによって、SU(1,1) リー群の不変体積が

$$\sinh r dr d\varphi d\psi \tag{2}$$

であることを示せ。