物理数学3　homework 8

2016/11/21

1　内部積とリー微分

n 次元多様体 M の点 p の接空間 $T_p(M)$ に属するベクトル $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial_{x^\mu}} (\mu = 1, 2, ..., n)$ に対して、r-形式 $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ を $r-1$-形式に変換する内部積 i_X は

$$i_X\omega = \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} \tag{1}$$

のように定義される。同じ X に対して、r-形式 ω を r-形式に変換するリー微分 $\mathcal{L}_X$ は

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega) \tag{2}$$

のように定義される。ここで、$d\omega$ は ω の外微分である。
(1) ξ, ω をそれぞれ r-形式、s-形式とし、次の式が成り立つことを示せ。

$$\begin{gathered} \xi \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \xi, \qquad i_X^2 = 0, \\ i_X(\xi \wedge \omega) = (i_X\xi) \wedge \omega + (-1)^r \xi \wedge (i_X\omega) \end{gathered} \tag{3}$$

(2) 外微分、内部積とリー微分の交換関係が

$$[d, \mathcal{L}_X] = 0, \qquad [i_Y, \mathcal{L}_X] = i_{[Y,X]} \tag{4}$$

となることを示せ。
(3) 小問 (1) と (2) の結果を使って、リー微分が次の性質を持つことを示せ。

$$\mathcal{L}_X(\xi \wedge \omega) = (\mathcal{L}_X\xi) \wedge \omega + \xi \wedge (\mathcal{L}_X\omega), \qquad [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]} \tag{5}$$

(4) M が $2m$ 次元シンプレクティック多様体である時、座標を $q^1, q^2, ..., q^m, p^1, p^2, ..., p^m$ で表し、任意の M 上の微分可能関数 $H(\{q^j, p^j\}_{j=1}^m)$ によってハミルトニアンのベクトル場 (Hamiltonian vector field) が

$$X_H = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial H}{\partial p^j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^j} \right) \tag{6}$$

のように定義できる。任意の X_H に対してシンプレクティック形式 $\omega = \sum_{j=1}^m dq^j \wedge dp^j$ が

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0 \tag{7}$$

を満たすことを示せ。この結果 (7) と式 (5) の左辺を用いて、リウヴィルの定理[1] を証明せよ。

[1] リウヴィルの定理とは、体積形式 $dq^1 \wedge ... \wedge dq^m \wedge dp^1 \wedge ... \wedge dp^m$ がハミルトンニアンによる時間発展の下に不変であること。