物理数学3　homework 9

2016/11/28

1　ベクトル代数の諸公式

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ を 3 次元実空間上のベクトルとする。
(1) 微分形式の視点から等式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \tag{1}$$

が成り立つことを説明せよ。（ヒント：3 次元空間では、二つの 1-形式のウェッジ積はベクトルの外積に対応し、更にそれともう一つの 1-形式とのウェッジ積を考えてみよ。）また、この結果はスカラーか、あるいは擬スカラーか答えよ。
(2) homework 8 で内部積に関する等式

$$i_X(\xi \wedge \omega) = (i_X\xi) \wedge \omega + (-1)^r \xi \wedge (i_X\omega) \tag{2}$$

を示した。この等式を 3 次元実空間に当てはめることで、等式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{3}$$

を示せ。また、この結果は極性ベクトル、あるいは軸性ベクトルか答えよ。
(3) 式 (1) と (3) を用いて、等式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{4}$$

を示せ。

2　ガウスの定理の応用

(1) 真空中ある体積 V 内の既知の電荷分布 ρ に対して、静電ポテンシャル ϕ はポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

に従う。ディリクレ境界条件 $\phi|_{\partial V} = \phi_S$ を課すとポアソン方程式の解はユニークとなることを示せ。(ヒント：二つ異なった解 ϕ, ϕ' があることを仮定し、その差を $\varphi = \phi - \phi'$ と書き、$\varphi\nabla\varphi$ に対してガウスの定理を使い矛盾を示せば良い。)
(2) 電荷、電流のない真空中ある体積 V における電磁場のエネルギー保存則

$$\iint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u dV \tag{6}$$

を示せ。ここで、$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ はポインティング・ベクトルであり、$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2)$ はエネルギー密度である。(ヒント：マクスウェルの方程式 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ とベクトル解析の公式を使えば良い。)