物理数学3（上田正仁）中間試験（試験時間：105分）

2016/12/5

問題1から問題4全てに解答せよ。問題に不備、条件不十分な点等があると思われる場合は、どの点をどのように修正、解釈したかを明記した上で、その修正、解釈の下で解け。
解答用紙は1枚である。用紙の裏面も用いてよい。
遅刻は試験開始後30分までである。試験開始後30分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

1 群と元の位数

(1) 位数が n の有限群 G の任意の元 g に対して、$g^k = e$(G の単位元) を満たす $k \in \{1, 2, ..., n\}$ の存在性を示せ。
(2) g の位数 k は常に G の位数 n の約数であることを示せ。
(3) n は偶数の場合、G は位数が2の元を持つことを証明せよ。

2 巡回群の表現

位数が N の巡回群 Z_N は

$$Z_N = \{e, g, ..., g^{N-1} | g^N = e\} \tag{1}$$

で定まる。
(1) 可換な有限群の全ての既約表現は1次元であることを説明せよ。
(2) 小問 (1) の事実を用いて、巡回群 Z_N の既約表現を求めよ。
(3) Z_N の N 次元表現 D は

$$D(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

で定まる。この表現を小問 (2) で得た既約表現に分解せよ。
(4) 小問 (3) の結果を用いて、巡回行列

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{N-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

の全ての固有値を求めよ。

3　カシミール元

リー代数 $\mathrm{W} = \{X_i\}$ の構造定数を f_{ijk} とし、カルタン計量を $g_{ij} = f_{ikl}f_{jlk}$ と定義する。g_{ij} の逆行列 g^{ij} の存在を仮定すると、W のカシミール元 (Casimir element)C は

$$C = g^{ij}X_iX_j \tag{4}$$

のように定義することができる。
(1) 構造定数 f_{ijk} の反対称性 $f_{ijk} = -f_{jik}$ を使って、任意の k に対して

$$g^{il}f_{lkj} + g^{jl}f_{lki} = 0 \tag{5}$$

が成り立つことを示せ。
(2) 小問 (1) の結果と恒等式 $[XY, Z] = [X, Z]Y + X[Y, Z]$ を使って、カシミール元 C はリー代数の中心に属すること (つまり、$[C, X] = 0,\ \forall X \in \mathrm{W}$) を示せ。
(3) $\mathfrak{su}(1, 1)$ リー代数の三つの生成元 $X_j(j = 0, 1, 2)$ は交換関係

$$[X_1, X_2] = -iX_0, \quad [X_0, X_1] = iX_2, \quad [X_2, X_0] = iX_1 \tag{6}$$

を満たす。$\mathfrak{su}(1, 1)$ リー代数のカルタン計量 g_{ij} を求め、カシミール元 C を X_0, X_1, X_2 で表せ。

4　SU(1,1) リー群の不変体積

SU(1,1) リー群の元は

$$g(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2} & e^{\frac{i}{2}(\varphi-\psi)}\sinh\frac{r}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}\sinh\frac{r}{2} & e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2} \end{pmatrix}$$

と表現することできる。この事実を利用して次の設問に答えよ。
(1) SU(1,1) リー群は $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| > |\beta| \right\}$ の部分群である。G の不変体積が

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)^{-2} d\alpha d\bar{\alpha} d\beta d\bar{\beta} \tag{7}$$

であることを示せ。
(2) G 上の積分を SU(1,1) に落とす場合、式 (7) に因子 $\delta(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)$ を加えば良い。また、G の元の座標を $\alpha = ue^{\frac{i}{2}(\varphi+\psi)}\cosh\frac{r}{2}, \beta = ue^{\frac{i}{2}(\varphi-\psi)}\sinh\frac{r}{2} (u > 0)$ のように書き換えることができる。これらのことによって、SU(1,1) リー群の不変体積が

$$\sinh r dr d\varphi d\psi \tag{8}$$

であることを示せ。

5　授業に関して

この問題の回答内容によって成績評価が左右されることはありません。
(1) homework をいつ解いていますか？
(ア) 毎週アップロードされたらすぐに解いている
(イ) テスト前にまとめて解いている (ウ) 解いていない
(2) homework の難易度について
(ア) 難しすぎる (イ) ちょうど良い (ウ) やさしすぎる (エ) 問題が良くない
(3) 授業や homework について要望や改善点など率直な意見を聞かせてください。