量子力学 II（上田 正仁）　期末試験

2017 年 7 月 18 日　10:30 - 12:10（100 分）

全般的な注意

- 問題 1 から問題 5 までのすべてに解答せよ。問題に不備があると思われる場合は、問題のどの点をどのように修正、あるいは解釈したかを明記した上で、その修正、解釈のもとで解答せよ。
- 解答用紙は 2 枚である。そのうち、1 枚については表面に問題 1 と問題 2、裏面に問題 3 の解答を記述し、もう 1 枚については表面に問題 4、裏面に問題 5 の解答を記述せよ。
- 遅刻は試験開始後 30 分まで認められる。試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1

この問題によって成績評価が左右されることはありません。

(1) 講義ノートと演習問題について、誤りや改善点などがあれば指摘してください。

(2) 授業や演習問題について、要望や改善点など、率直な意見を述べてください。

問題 2　Rabi 振動

(1) 非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_0$ に、時間に依存する摂動 $\hat{V}(t)$ が与えられた場合を考える。Schrödinger 表示における状態 $|\psi(t)\rangle_S$ が時間発展方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right)|\psi(t)\rangle_S$$

に従うとき、相互作用表示における状態と物理量を

$$|\psi(t)\rangle_I := e^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}|\psi(t)\rangle_S\,,\quad \hat{V}_I(t) := e^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}(t)\,e^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}$$

と定義する。このとき、相互作用表示における状態 $|\psi(t)\rangle_I$ が従う時間発展方程式を書き下せ（導出も示すこと）。

(2) とくに、ハミルトニアンが次のように与えられる 2 準位系を考える：

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{V}(t) = \gamma\left(e^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{\sigma}_+ + e^{\mathrm{i}\omega t}\hat{\sigma}_-\right) = \gamma\begin{pmatrix}0 & e^{-\mathrm{i}\omega t}\\ e^{\mathrm{i}\omega t} & 0\end{pmatrix}$$

初期時刻 $t=0$ で状態は $\hat{H}_0$ の基底状態 $(0,1)^T$ にあったとして、時刻 $t \geq 0$ に励起状態 $(1,0)^T$ にある確率 を $P(t)$ とする。γ が十分に小さいとして $\hat{V}$ を時間に依存する摂動とみなし、最低次の近似で $P(t)$ を求めよ。

問題 3　二重井戸ポテンシャル

左右対称な二重井戸ポテンシャルのなかにある粒子の、$V_{\mathrm{min}} < E \ll V(x=0)$ を満たす束縛状態を考える。(図 1)。$V(x) = E$ の正の解を $0 < x_1 < x_2$ とする。

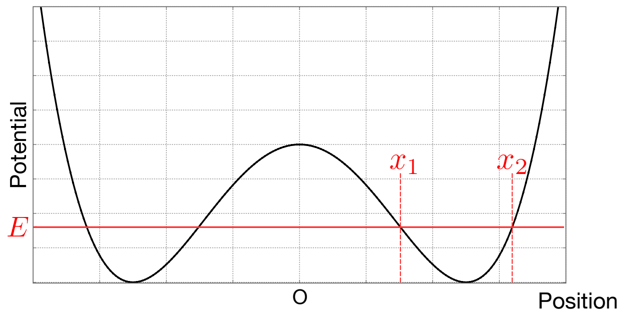

図 1: 二重井戸ポテンシャル

WKB 近似を用いると、$x > 0$ における準古典波動関数は

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{\kappa(x)}}\left\{2e^{\delta(x,\,x_1)}\cos\left[\theta(x_1,\,x_2)\right] + e^{-\delta(x,\,x_1)}\sin\left[\theta(x_1,\,x_2)\right]\right\} & 0 < x < x_1 \\ \dfrac{2C}{\sqrt{p(x)}}\cos\left[\theta(x,\,x_2) - \dfrac{\pi}{4}\right] & x_1 < x < x_2 \\ \dfrac{C}{\sqrt{\kappa(x)}}e^{-\delta(x_2,\,x)} & x_2 < x \end{cases}$$

と表される。ただし、C は適当な規格化定数であり、

$$p(x) := \sqrt{2m(E - V(x))},\ \ \kappa(x) := \sqrt{2m(V(x) - E)}$$

として、

$$\theta(a,\,b) := \frac{1}{\hbar}\int_a^b p(x)\,dx,\quad \delta(a,\,b) := \frac{1}{\hbar}\int_a^b \kappa(x)\,dx$$

である。

(1)　二重井戸ポテンシャルは左右対称なので、固有状態は奇関数または偶関数である。このことを用いて、量子化条件

$$\tan\left[\theta(x_1,\,x_2)\right] = \pm 2e^{\delta(-x_1,\,x_1)}$$

が成り立つことを示せ。ただし、複号は、波動関数が偶関数のときに $-$、奇関数のときに $+$ となるように取るものとする。

(2)　ポテンシャル障壁が十分に大きなときには ($E \ll V(x=0)$)、$\delta(-x_1,\,x_1)$ が十分に大きくなる。そのため、ε を $\delta(-x_1,\,x_1)$ によって定まる微小量として、

$$\theta(x_1,\,x_2) \simeq \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \varepsilon \quad (n = 0,\,1,\,2,\,\cdots)$$

と表すことができる。ε を $\delta(-x_1,\,x_1)$ を用いて最低次の近似で求めよ。

以下ではとくに、二重井戸が

$$V\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}m\omega^2\left(x+a\right)^2 & (x<0)\\ \dfrac{1}{2}m\omega^2\left(x-a\right)^2 & (x>0)\end{cases}$$

と表される場合を考える ($m\omega a^2/\hbar\gg 1$)。

(3) $\theta\left(x_1,\,x_2\right)$ を計算し、エネルギー E を用いて表せ。

(4) エネルギースペクトルを最低次の近似で求めよ。

問題 4　２次元の水素原子

２次元における水素原子のスペクトルを代数的に導出しよう。ハミルトニアンは、

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^{\,2}+\hat{p}_y^{\,2}}{2m}-\frac{k}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}}$$

で ($k>0$)、束縛状態を考えるものとする ($E<0$)。このとき、軌道角運動量を $\hat{L}:=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$ によって定義する。

(1) 交換子 $[\,\hat{x},\,\hat{L}\,]$, $[\,\hat{y},\,\hat{L}\,]$ および $[\,\hat{p}_x,\,\hat{L}\,]$, $[\,\hat{p}_y,\,\hat{L}\,]$ を計算せよ。

(2) 交換子

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}},\,\hat{p}_i\right]\quad\text{および}\quad\left[\frac{1}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}},\,\hat{L}\right]$$

を計算せよ ($i=x,\,y$)。

Runge-Lenz ベクトルを

$$\hat{R}_x:=-\frac{k\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}}+\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_y\,\hat{L}+\hat{L}\,\hat{p}_y\right)$$
$$\hat{R}_y:=-\frac{k\hat{y}}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}}-\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x\,\hat{L}+\hat{L}\,\hat{p}_x\right)$$

によって定義する。Runge-Lenz ベクトルはハミルトニアンと交換する：

$$[\,\hat{R}_x,\,\hat{H}\,]=[\,\hat{R}_y,\,\hat{H}\,]=0$$

また、以下ではエネルギー $E<0$ の固有状態を考え、

$$\hat{\vec{K}}:=\sqrt{\frac{m}{-2E}}\hat{\vec{R}}$$

として、規格化した Runge-Lenz ベクトル $\hat{\vec{K}}$ を用いる。

(3) 角運動量演算子 $\hat{L}$ と Runge-Lenz ベクトル $\hat{K}_x$, $\hat{K}_y$ のあいだには、

$$[\,\hat{K}_x,\,\hat{K}_y\,]=\mathrm{i}\hbar\hat{L},\quad[\,\hat{K}_y,\,\hat{L}\,]=\mathrm{i}\hbar\hat{K}_x,\quad[\,\hat{L},\,\hat{K}_x\,]=\mathrm{i}\hbar\hat{K}_y$$

という関係が成り立つ。このうち、$[\,\hat{L},\,\hat{K}_x\,]=\mathrm{i}\hbar\hat{K}_y$ が成り立つことを示せ。

設問 (3) で考えた交換関係は、$\hat{J}_x := \hat{K}_x,\ \hat{J}_y := \hat{K}_y,\ \hat{J}_z := \hat{L}$ によって演算子 $\hat{\vec{J}} = (\,\hat{J}_x,\ \hat{J}_y,\ \hat{J}_z\,)$ を定義すると、

$$[\,\hat{J}_x,\ \hat{J}_y\,] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_z,\quad [\,\hat{J}_y,\ \hat{J}_z\,] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_x,\quad [\,\hat{J}_z,\ \hat{J}_x\,] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_y$$

に相当する。すなわち、**演算子 $\hat{\vec{J}}$ は角運動量の代数を満足する**。また、

$$\hat{\vec{J}}^2 = \left(\frac{mk^2}{-2E} - \frac{\hbar^2}{4}\right)\hat{I} \tag{$\star$}$$

が成り立つ（この式が成り立つことを証明する必要はない)。

(4) 演算子 $\hat{\vec{J}}$ が角運動量の代数を満たすことと、式 ($\star$) を用いて、２次元の水素原子のエネルギースペクトルを求めよ。また、エネルギー準位の縮退度を求めよ。

問題 5　相互作用するふたつの１次元調和振動子

相互作用するふたつの 1 次元調和振動子を考える。ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_1^2\right) + \left(\frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_2^2\right) + gm\omega^2\hat{x}_1\hat{x}_2$$

である。ここで、$\hat{x}_i$ および $\hat{p}_i$ は、それぞれ調和振動子 i の位置演算子および運動量演算子である ($i = 1,\,2$)。また、$\hat{V} := gm\omega^2\hat{x}_1\hat{x}_2$ が相互作用項である。この問題では、相互作用が十分に小さいものとして ($|g| \ll 1$)、摂動論を用いて $\hat{H}$ のスペクトルを求めたい。

(1) 生成消滅演算子を

$$\hat{a}_i := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}_i + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}_i,\ \ \hat{a}_i^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}_i - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}_i$$

と定義したとき ($i = 1,\,2$)、$\hat{H}$ を生成消滅演算子を用いて表せ。

(2) 非摂動ハミルトニアン（$g = 0$ としたときの $\hat{H}$）のエネルギースペクトルと対応する固有状態系を求めよ（答だけでよい)。

(3) 基底エネルギーの補正を g について 1 次まで計算せよ。

(4) 第 1 励起状態のエネルギー準位の補正を g について 1 次まで計算せよ。

(5) 第 2 励起状態のエネルギー準位の補正を g について 1 次まで計算せよ。

(6) ハミルトニアン $\hat{H}$ は、

$$y_1 := \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}},\ y_2 := \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

および対応する運動量を導入すれば厳密に解くことができる。このようにして厳密解を求めて、設問 (3)・(4)・(5) の摂動論によって得られた結果と g の 1 次までで一致することを確かめよ。

（問題は以上です）