量子力学 II（上田 正仁）　中間試験

2017 年 6 月 13 日　10:30 - 12:10（100 分）

全般的な注意

- 問題 1 から問題 5 までのすべてに解答せよ。問題に不備があると思われる場合は、問題のどの点をどのように修正、あるいは解釈したかを明記した上で、その修正、解釈のもとで解答せよ。
- 解答用紙は 2 枚である。そのうち、1 枚については表面に問題 1 と問題 2、裏面に問題 3 の解答を記述し、もう 1 枚については表面に問題 4、裏面に問題 5 の解答を記述せよ。
- 遅刻は試験開始後 30 分まで認められる。試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1

この問題によって成績評価が左右されることはありません。

(1) 演習問題の難易を教えてください。

(a) 難しすぎる　(b) やや難しい　(c) 適切である　(d) やや易しい　(e) 易しすぎる

(2) 授業や演習問題について、要望や改善点など、率直な意見を述べてください。

問題 2　2 準位系

ヒルベルト空間が 2 次元で、ある正規直交基底が $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と表されるものとする。このとき、演算子 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ を

$$\hat{\sigma}_x := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|,\ \hat{\sigma}_y := -\mathrm{i}\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \mathrm{i}\,|\downarrow\rangle\langle\uparrow|,\ \hat{\sigma}_z := |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

と定義する。

(1) $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を基底として、$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ をそれぞれ行列表示せよ。

(2) $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ の固有値と（規格化された）固有状態をそれぞれ求めよ。

(3) 交換関係および反交換関係

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}\hat{I}_2$$

が、$i = x$ **の場合に**成り立つことを示せ（以下の問題では上記の交換関係・反交換関係を自由に用いてよい）。ただし、ε_{ijk} は Levi-Civita 記号であり、$\hat{I}_2$ は恒等演算子である。

(4) $\vec{a}, \vec{b}$ を任意の 3 次元ベクトルとして、

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a})\,(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\hat{I}_2 + \mathrm{i}\,\hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

が成り立つことを示せ。

問題 3　平行移動の生成子としての運動量

(1)　位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ について、交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ をもとにして、交換子 $[\hat{x}, \hat{p}^n]$ (n は正の整数) を計算せよ。

(2)　前問の結果をもとにして、

$$[\hat{x},\, f(\hat{p})] = \mathrm{i}\hbar\frac{df}{dp}(\hat{p}), \quad [\hat{p},\, g(\hat{x})] = -\mathrm{i}\hbar\frac{dg}{dx}(\hat{x})$$

が成り立つことを示せ。ただし、f, g は十分なめらかな関数であるものとする。

(3)　運動量演算子 $\hat{p}$ と長さの次元をもつ適当なスカラー a を用いて、演算子 $\hat{T}(a)$ を

$$\hat{T}(a) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\hat{p}\,a}{\hbar}\right)$$

と定義する。このとき、交換子 $[\,\hat{x}, \hat{T}(a)\,]$ を計算せよ。

(4)　状態 $\hat{T}(a)\,|x\rangle$ が位置演算子 $\hat{x}$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

問題 4　スピンふたつの系の基底状態

(1)　角運動量 1/2 をもつふたつの状態の合成を考える。ふたつの状態の角運動量を $\hat{\vec{J}}_1, \hat{\vec{J}}_2$ と表すと、合成状態の基底は $\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}$ の同時固有状態と、$\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z$ の同時固有状態の二通りをとることができる（ただし $\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$ は全角運動量)。$\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z$ の同時固有状態を、$\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}$ の同時固有状態を用いて表せ。

ふたつのスピン 1/2 の粒子 $\hat{\vec{S}}_1,\ \hat{\vec{S}}_2$ があり、Hamiltonian

$$\hat{H} = -J\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 - h\left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right)$$

のもとで相互作用している。

(2)　上式で記述される系の固有エネルギーと固有状態を求めよ。

(3)　$h = 0$ のとき、系の基底エネルギーと基底状態を求めよ。

（問題は続きます）

問題 5　PT 対称な量子力学

通常の量子力学の枠組みでは、観測量である固有値が実数となることから、演算子がエルミートであることが要請される。しかし、**演算子がエルミートであることは、固有値が実数となることの十分条件であるが必要条件ではない**。すなわち、演算子がエルミートであれば固有値は実数となるが、固有値が実数であるからといって演算子がエルミートになるとは限らない。実際、**演算子が非エルミートであっても、パリティ・時間 (PT) 対称であれば、その固有値が実数になりうる**ことが知られている。ここでは、量子力学 II で学んだ内容を踏まえて、PT 対称な量子力学について基本的な性質を調べよう。

PT 対称な量子力学といったとき、'P' はパリティ（空間反転）を、'T' は時間反転を表す。すなわち、位置演算子 $\hat{x}$、運動量演算子 $\hat{p}$、虚数単位 i のパリティ $\hat{P}$ および時間反転 $\hat{T}$ に対する変換則は

$$\hat{P}\,\hat{x}\,\hat{P}^{-1} = -\hat{x}, \quad \hat{P}\,\hat{p}\,\hat{P}^{-1} = -\hat{p}, \quad \hat{P}\,\mathrm{i}\,\hat{P}^{-1} = \mathrm{i}$$
$$\hat{T}\,\hat{x}\,\hat{T}^{-1} = \hat{x}, \quad \hat{T}\,\hat{p}\,\hat{T}^{-1} = -\hat{p}, \quad \hat{T}\,\mathrm{i}\,\hat{T}^{-1} = -\mathrm{i}$$

で与えられる。また、$\hat{P}^2 = \hat{T}^2 = \hat{I}$ が成り立ち、$\hat{P}$ と $\hat{T}$ は互いに交換する。

このとき、ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ が PT 対称であるとは、演算子 $\hat{P}\hat{T}$ を用いて、

$$(\hat{P}\hat{T})\,\hat{H}_{\mathrm{PT}}\,(\hat{P}\hat{T})^{-1} = \hat{H}_{\mathrm{PT}}, \quad \text{すなわち} \quad \left[\hat{H}_{\mathrm{PT}},\, \hat{P}\hat{T}\right] = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) 演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ の、$\hat{P}\hat{T}$ に対する変換則を求めよ。すなわち、$(\hat{P}\hat{T})\,\hat{x}\,(\hat{P}\hat{T})^{-1}$, $(\hat{P}\hat{T})\,\hat{p}\,(\hat{P}\hat{T})^{-1}$ を計算せよ。

(2) ハミルトニアンが

$$\hat{H}_{\mathrm{PT}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \left[V_R\left(\hat{x}\right) + \mathrm{i}V_I\left(\hat{x}\right)\right]$$

と表されるとき (m は実数で、V_R, V_I は実関数)、PT 対称となるための条件を求めよ。

(3) ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ の固有値 E に属するある固有状態を $|\psi\rangle$ とする。$|\psi\rangle$ が $\hat{P}\hat{T}$ の固有状態でもあったとき、E が実数となることを示せ。

このように、PT 対称なハミルトニアンの固有状態が $\hat{P}\hat{T}$ の固有状態であるとき、固有値は確かに実数となる。ただし、演算子 $\hat{T}$ は反ユニタリーであるので、$\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ と $\hat{P}\hat{T}$ が交換してもハミルトニアンの固有状態が必ず $\hat{P}\hat{T}$ の固有状態になるとは限らない。 それゆえ、PT 対称なハミルトニアンにおいては、あるパラメータ領域では固有値が実数になり、それ以外のパラメータ領域では固有値が複素になる。

上記のことを確認するために、以下では具体的な PT 対称な 2 準位系

$$\hat{H}_{\mathrm{PT}} = s\begin{pmatrix} \mathrm{i}a & 1 \\ 1 & -\mathrm{i}a \end{pmatrix}$$

について考える。ただし、$s \geq 0$ はエネルギーの次元をもつ定数であり、$a \geq 0$ は非エルミート性を表す無次元のパラメータである（a が大きいほど非エルミート性が強くなる)。

(4) 上で定義した PT 対称な 2 準位系の固有値を求めよ。また、a の値を変化させたとき、ある値を閾値として固有値が実数から虚数へと転じることを確認し、その閾値となる a の値を求めよ。

ハミルトニアンがエルミートであることは、固有値が実であること以外の物理的性質も保証していた。たとえば、PT 対称なハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ によって定義される時間発展演算子 $\hat{V}_{\mathrm{PT}} := e^{-\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{PT}}t/\hbar}$ は、固有値が実であっても $\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ が非エルミートであればユニタリーでなくなる。

(5) 上で定義した PT 対称な 2 準位系について、時間発展演算子 $\hat{V}_{\mathrm{PT}} := e^{-\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{PT}}t/\hbar}$ を具体的に計算せよ。また、設問 (4) で求めた閾値となる a の値における $\hat{V}_{\mathrm{PT}}$ の振舞いについて調べよ。

（問題は以上です）