量子力学 II　演習問題 1

2017 年 5 月 1 日

1．2 準位系 (1)

ヒルベルト空間が 2 次元で、ある正規直交基底が $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と表されるものとする。このとき、演算子 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ を

$$\hat{\sigma}_x := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|,\ \hat{\sigma}_y := -\mathrm{i}\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \mathrm{i}\,|\downarrow\rangle\langle\uparrow|,\ \hat{\sigma}_z := |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

と定義する。

(1) 上で定義した演算子 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ がエルミートであることを実際に確かめよ。

(2) $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を基底として、$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ をそれぞれ行列表示せよ。

(3) $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ の固有値と固有状態をそれぞれ求めよ。

(4) $\hat{\sigma}_x$ の固有状態を $|+\rangle, |-\rangle$ と表すものとする。このとき、$|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底として、$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ をそれぞれ行列表示せよ。

(5) 交換関係および反交換関係

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}\hat{I}_2$$

が成り立つことを示せ。ただし、ε_{ijk} は Levi-Civita 記号であり、$\hat{I}_2$ は恒等演算子である。

(6) 2 次元のヒルベルト空間上で作用するかってな演算子は、$\hat{I}_2, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ の線形結合で表されることを示せ。

2．2 準位系 (2)

スピン 1/2 の系が、物理量 $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{n}$ の固有状態にあるものとする。ただし、

$$\hat{\vec{S}} := \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_x,\, \hat{\sigma}_y,\, \hat{\sigma}_z), \quad \vec{n} := (\sin\theta,\, 0,\, \cos\theta)$$

である（記号は前問と同じものを意味する）。$\hat{\vec{S}}\cdot\vec{n}$ の正の固有値に属する状態を $|+\theta\rangle$ と表す。

(1) $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{n}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(2) 状態 $|+\theta\rangle$ について、物理量 $\hat{S}_x$ を測定したとき、$+\hbar/2$ の測定値が得られる確率を求めよ。

(3) 状態 $|+\theta\rangle$ について、物理量 $\hat{S}_x$ の期待値 $\overline{S}_x := \langle +\theta\,|\,\hat{S}_x\,|+\theta\rangle$ を求めよ。また、分散 $(\Delta S_x)^2 := \langle +\theta\,|\,(\hat{S}_x - \overline{S}_x)^2\,|+\theta\rangle$ を求めよ。

3. 座標表示と波数表示

1 次元の連続変数 $x \in (-\infty, \infty)$ で表された正規直交基底 $|x\rangle$ をもつヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考える。このとき、連続変数 $k \in (-\infty, \infty)$ を用いて、状態 $|k\rangle$ を

$$|k\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathrm{i}kx} |x\rangle$$

と定義する。

(1) $|x\rangle$ を $|k\rangle$ の線形結合で表せ。

(2) $|x\rangle$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底であることを用いて、$|k\rangle$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底であることを示せ。

(3) $|x\rangle$ を基底として表示した波動関数 $\langle x|\psi\rangle$ と、$|k\rangle$ を基底として表示した波動関数 $\langle k|\psi\rangle$ のあいだの変換則を求めよ。