

## 量子力学 II 演習問題 10

2017 年 6 月 27 日

### 1. 励起状態の Stark 効果

水素原子の励起状態に対する一様な静電場の影響を調べたい (Stark 効果)。非摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_0$  を水素原子のハミルトニアンとして、静電場による摂動を

$$\hat{V} = -eE\hat{z}$$

とする。このとき、水素原子の第 1 励起状態 (主量子数  $n = 2$  の励起状態) に対するエネルギー準位の補正を、 $\hat{V}$  について 1 次まで求めよ。ただし、第 1 励起状態の波動関数は以下の通りである ( $\psi_{n,l,m}$  は、主量子数  $n$ 、軌道角運動量  $l$ 、磁気量子数  $m$  の固有状態の波動関数である) :

$$\begin{aligned}\psi_{2,0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a_0^3}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\ \psi_{2,1,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a_0^3}} \frac{r}{2\sqrt{2}a_0} e^{-r/2a_0} \cos\theta \\ \psi_{2,1,\pm 1} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a_0^3}} \frac{r}{4a_0} e^{-r/2a_0} e^{\pm i\phi} \sin\theta\end{aligned}$$

### 2. Rabi 振動

ハミルトニアンが以下で示す  $\hat{H}_0 + \hat{V}$  で与えられる 2 準位系を考える :

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hat{V} &= \gamma (e^{-i\omega t} \hat{\sigma}_+ + e^{i\omega t} \hat{\sigma}_-) = \gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

初期時刻  $t = 0$  で状態は  $\hat{H}_0$  の基底状態  $(0, 1)^T$  にあったとして、時刻  $t \geq 0$  に励起状態  $(1, 0)^T$  にある確率  $P(t)$  を求めたい。

(1) Schrödinger 方程式を実際に解いて、 $P(t)$  を厳密に求めよ。

**ヒント** 相互作用表示を用いるのが便利である。

(2)  $\gamma$  が十分に小さいとして  $\hat{V}$  を時間に依存する摂動とみなし、最低次の近似で  $P(t)$  を求めよ。また、得られた結果を前問の厳密解と比較せよ。

### 3. 基底状態から励起状態への遷移（1次元調和振動子）

1次元調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

を非摂動ハミルトニアンとして、

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ F\hat{x} & (t \geq 0) \end{cases}$$

が摂動として与えられた場合を考える。 $t = 0$  で  $\hat{H}_0$  の基底状態にあったとき、 $t \rightarrow \infty$  で第  $n$  励起状態にある確率  $P_n$  を求めたい。

(1)  $P_n$  を厳密に求めよ。

**ヒント**  $t > 0$  のときのハミルトニアンは、定数  $x_0$  と  $E_0$  を適当に選ぶと、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x} - x_0\hat{I})^2 + E_0\hat{I}$$

となるので、第  $n$  励起状態は厳密に求めることができる。また、必要であれば Baker-Hausdorf の公式（講義ノートおよび演習問題 7-2 を参照）を用いよ。

(2) 時間に依存する摂動論を用いて、 $P_n$  を最低次の近似で求めよ。また、得られた結果を前問の厳密解と比較せよ。