量子力学 II　演習問題 2

2017 年 5 月 1 日

1．Hellmann-Feynman の定理

パラメータ λ に依存するハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}(\lambda)$ を考える。固有値 $E_n = E_n(\lambda)$ に属する固有状態を $|\psi_n\rangle = |\psi_n(\lambda)\rangle$ としたとき、

$$\langle\psi_n(\lambda)| \left(\frac{d\hat{H}}{d\lambda}\right) |\psi_n(\lambda)\rangle = \frac{dE_n}{d\lambda}$$

が成り立つことを示せ。

ヒント：固有値方程式 $\hat{H}(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle$ の両辺を λ で微分する。

2．平行移動の生成子としての運動量

(1) 位置演算子 $\hat{\vec{x}}$ と運動量演算子 $\hat{\vec{p}}$ について、交換関係 $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ をもとにして、

$$\left[\hat{x}_i,\, f(\hat{\vec{p}})\right] = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \left[\hat{p}_i,\, g(\hat{\vec{x}})\right] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

が成り立つことを示せ。ただし、f, g は十分なめらかな適当な関数であるものとする。

(2) 運動量演算子 $\hat{\vec{p}}$ と適当なベクトル $\vec{a}$ を用いて、演算子 $\hat{T}(\vec{a})$ を

$$\hat{T}(\vec{a}) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}}{\hbar}\right)$$

と定義する。このとき、交換子 $[\,\hat{x}_i, \hat{T}(\vec{a})\,]$ を計算せよ。

(3) 状態 $\hat{T}(\vec{a})|\vec{x}\rangle$ が位置演算子 $\hat{\vec{x}}$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。また、この結果から、運動量演算子 $\hat{\vec{p}}$ が（位置の）平行移動の生成演算子として理解できることを説明せよ。

3．不確定性関係

以下の手順で、不確定性関係が成り立つことを示したい。

(1) 任意のエルミート演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ と状態 $|\psi\rangle$ に対して、

$$\left|\langle\psi|\,[\hat{A},\hat{B}]\,|\psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi|\,\{\hat{A},\hat{B}\}\,|\psi\rangle\right|^2 = 4\left|\langle\psi|\,\hat{A}\hat{B}\,|\psi\rangle\right|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) 前問の結果を踏まえて、不等式

$$\left|\langle\psi|\,[\hat{A},\hat{B}]\,|\psi\rangle\right|^2 \le 4\,\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle\,\langle\psi|\,\hat{B}^2\,|\psi\rangle$$

が成り立つことを示せ。また、等号成立条件を述べよ。

(3) 物理量 $\hat{A}$ の状態 $|\psi\rangle$ における標準偏差を ΔA と表したとき、不確定性関係（Kennard-Robertson の不等式）

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle\psi|\,[\hat{A},\hat{B}]\,|\psi\rangle \right|$$

が成立することを示せ。また、等号成立条件を述べよ。

(4) とくに、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ について、

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことを示せ。