量子力学 II　演習問題 3

2017 年 5 月 6 日

1．2 準位系の時間発展

ハミルトニアン

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z$$

に従うスピン 1/2 をもつ粒子について考える。

(1) ハイゼンベルグ表示を用いて、時間に依存する演算子 $\hat{S}_x(t), \hat{S}_y(t), \hat{S}_z(t)$ を求めよ。

(2) スピンの期待値について、

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{S}_x(t) \rangle \\ \langle \hat{S}_y(t) \rangle \\ \langle \hat{S}_z(t) \rangle \end{pmatrix} = \hat{R}_z(\omega t) \begin{pmatrix} \langle \hat{S}_x(0) \rangle \\ \langle \hat{S}_y(0) \rangle \\ \langle \hat{S}_z(0) \rangle \end{pmatrix}$$

が成り立つことを確認せよ。ただし、$\hat{R}_i(\theta)$ は i 軸のまわりに角度 θ 回転させる演算子を表す。

2．デルタ関数ポテンシャル

1 次元空間をポテンシャル

$$V(x) = -V_0 \left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$$

のもとで運動する質量 m の粒子について考える（$V_0, a > 0$）。

(1) シュレディンガー方程式をもとにして、$x = a$ では、波動関数が接続条件

$$\left[\psi'(a+0^+) - \psi'(a+0^-)\right] + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(a) = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) V_0 が小さなときには束縛状態は一つしか存在しないが、（a によって定まる）ある値をこえると二つ存在するようになる。その閾値となるポテンシャルの大きさ V_c を求めよ。

(3) 束縛状態の波動関数を決定し、基底状態の波動関数にはノードがないことを確認せよ。

3．束縛状態の存在

1 次元空間をポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < 0) \\ 0 & (0 \le x \le a) \\ \gamma V_0 & (a < x) \end{cases}$$

のもとで運動する質量 m の粒子について考える（$V_0, a > 0$ かつ $0 < \gamma \le 1$）。この系について、束縛状態が存在するための条件を求めよ。