量子力学 II　演習問題 4

2017 年 5 月 6 日

1．対称性と保存則

物理量 $\hat{A}$ が、物理量 $\hat{B}$ によって表される操作に対して不変であったとする：

$$e^{-\mathrm{i}\theta\hat{B}}\,\hat{A}\,e^{\mathrm{i}\theta\hat{B}} = \hat{A}$$

このとき、逆に、物理量 $\hat{B}$ は物理量 $\hat{A}$ によって表される操作に対して不変であること

$$e^{-\mathrm{i}t\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{\mathrm{i}t\hat{A}} = \hat{B}$$

を示せ。

上記の命題から、たとえば、「ハミルトニアンがある軸のまわりの回転に対して不変である」ならば「その軸のまわりの角運動量は時間発展に対して不変である」ことが導かれる。

2．パリティ（空間反転）

1 次元空間をポテンシャル $V(x)$ のもとに運動する質量 m の粒子を考える。パリティ変換 $\hat{P}$ を

$$\hat{P}\,|x\rangle := |-x\rangle$$

として定義する。

(1) $\hat{P}$ がユニタリーであることを示せ。すなわち、かってな状態 $|\psi\rangle$ について、$\|\hat{P}\,|\psi\rangle\,\| = \|\,|\psi\rangle\,\|$ が成り立つことを示せ。

(2) 位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ のパリティに対する変換則を求めよ。すなわち、$\hat{P}\hat{x}\hat{P}^{-1}$ および $\hat{P}\hat{p}\hat{P}^{-1}$ を計算せよ。

(3) ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

と表されるとき、パリティ $\hat{P}$ が保存量となるための条件を求めよ。

(4) パリティが系の保存量であったとき、縮退していないエネルギー固有状態はパリティの固有状態でもあることを示せ。

3. 時間反転

スピン 1/2 をもつ系に対する時間反転操作 $\hat{T}$ を

$$\hat{T} := \mathrm{i}\,\hat{\sigma}_y \hat{K}$$

と定義する。ただし、$\hat{\sigma}_y$ は Pauli 行列であり、系のスピンに対して作用する。また、$\hat{K}$ は複素共役演算子である。

(1) $\hat{T}$ が反ユニタリであることを示せ。すなわち、かってな状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ に対して $|\tilde{\alpha}\rangle := \hat{T}\,|\alpha\rangle, |\tilde{\beta}\rangle := \hat{T}\,|\beta\rangle$ としたとき、$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ となることを示せ。

(2) 位置演算子 $\hat{\vec{x}}$、運動量演算子 $\hat{\vec{p}}$、軌道角運動量演算子 $\hat{\vec{L}} := \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$ の時間反転に対する変換則が

$$\hat{T}\,\hat{\vec{x}}\hat{T}^{-1} = \hat{\vec{x}}, \quad \hat{T}\,\hat{\vec{p}}\hat{T}^{-1} = -\hat{\vec{p}}, \quad \hat{T}\,\hat{\vec{L}}\,\hat{T}^{-1} = -\hat{\vec{L}}$$

となることを示せ。

(3) スピン演算子 $\hat{\vec{S}} := \hbar\,\hat{\vec{\sigma}}/2$（$\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ は Pauli 行列）の時間反転に対する変換則が

$$\hat{T}\,\hat{\vec{S}}\,\hat{T}^{-1} = -\hat{\vec{S}}$$

となることを示せ。

スピン 1/2 をもつ系が時間反転対称性をもつとき、すなわち

$$\hat{T}\,\hat{H}\,\hat{T}^{-1} = \hat{H}$$

が満たされるとき、エネルギー固有状態は必ず縮退する（Kramers の定理）。この定理を、以下のふたつを示すことで証明しよう。

(4) $|\varphi\rangle$ が $\hat{H}$ の固有状態であったとき、$|\tilde{\varphi}\rangle = \hat{T}\,|\varphi\rangle$ もまた $\hat{H}$ の固有状態であることを示せ。

(5) 前問の $|\varphi\rangle$ と $|\tilde{\varphi}\rangle$ は直交することを示せ。