量子力学 II　演習問題 5

2017 年 5 月 9 日

1．角運動量演算子

$\hat{\vec{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態

$$\hat{\vec{L}}^2 \left|L, M\right\rangle = \hbar^2 L \left(L+1\right) \left|L, M\right\rangle, \quad \hat{L}_z \left|L, M\right\rangle = \hbar M \left|L, M\right\rangle$$

に対して（$M = -L, -L+1, \cdots, +L$)、昇降演算子 $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm \mathrm{i} \hat{L}_y$ の行列要素は、

$$\begin{aligned} \langle L, M+1 | \hat{L}_+ | L, M\rangle &= \hbar \sqrt{\left(L-M\right)\left(L+M+1\right)} \\ \langle L, M-1 | \hat{L}_- | L, M\rangle &= \hbar \sqrt{\left(L+M\right)\left(L-M+1\right)} \end{aligned}$$

であった（講義ノートを参照)。

(1) 昇降演算子の行列要素を用いて、角運動量演算子 $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ の行列要素を求めよ。

(2) $L = 1/2$ と $L = 1$ の場合について、角運動量演算子 $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ の行列表示を具体的に書き下せ。

(3) 状態 $\left|L, M\right\rangle$ における $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ の期待値と分散を計算せよ。

2．Pauli 行列の性質

$\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ を Pauli 行列とする。Pauli 行列は、交換関係および反交換関係

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad \{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij} \hat{I}_2$$

を満たす。

(1) $\vec{a}, \vec{b}$ をかってな 3 次元ベクトルとして、

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a}) \, (\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \, \hat{I}_2 + \mathrm{i} \, \hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\vec{n}$ をかってな 3 次元の単位ベクトルとしたとき、

$$e^{-\mathrm{i}\theta \, (\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}})} = \hat{I}_2 \cos\theta - \mathrm{i} \, (\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}) \, \sin\theta$$

が成り立つことを示せ。

3. 球面調和関数

角運動量の固有関数として現れた、球面調和関数の性質についてもうすこし調べよう。球面調和関数 $Y_L^M(\theta,\phi)$ は、

$$Y_L^M(\theta,\phi) \propto e^{\mathrm{i}M\phi} P_L^M(\cos\theta) \qquad (M = -L,\, -L+1,\, \cdots, +L)$$

であった。ただし、P_L^M は陪ルジャンドル多項式であり、$Y_L^M(\theta,\phi)$ の規格化は球面上について行う：

$$\int d\Omega \, \left| Y_L^M(\theta,\phi) \right|^2 = 1$$

(1) $L=0$ についての球面調和関数 $Y_0^0(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ。

(2) $L=1$ についての球面調和関数 $Y_1^M(\theta,\phi)$ $(M=-1,\,0,\,1)$ を具体的に求めよ。

(3) $L=2$ についての球面調和関数 $Y_2^M(\theta,\phi)$ $(M=-2,\,-1,\,0,\,1,\,2)$ を具体的に求めよ。

(4) 単位球面を考えて、

$$x = \sin\theta\cos\phi,\; y = \sin\theta\sin\phi,\; z = \cos\theta$$

としたとき、前問までで求めた球面調和関数を (θ,ϕ) ではなく (x,y,z) を用いて表せ。

球面調和関数は、ある固定された球面上で作用する関数空間の基底をなす。このことを (x,y,z) 座標のもとで考えると、$\left(Y_L^M\right)$ は単位球面上にある x,y,z（$x^2+y^2+z^2=1$ を満たす x,y,z）についてのすべての多項式の基底となっているはずである。ここでまず、問題 (4) から、$L=0,\,1,\,2$ について、$Y_L^M(x,y,z)$ が x,y,z についての L 次多項式であることが確認できる（このことは一般の L についても成り立つ)。

(5) 一般の L に対して、単位球面上にある x,y,z についての L 次多項式のうち、線形独立なものの個数は $2L+1$ であることを示せ。

問題 (5) の結果は、与えられた L に対して許される M が $M=-L,\,-L+1,\,\cdots,+L$ であることに整合し、球面調和関数が球面上における関数空間の基底となっていることが確認できる。