量子力学 II　演習問題 6

2017 年 5 月 22 日

1. 角運動量の合成

角運動量 $J_1 = 1/2$ をもつ状態と角運動量 $J_2 = 1$ をもつ状態の合成を考える。授業で学んだように、合成状態の基底は $\hat{J}_{1z}$, $\hat{J}_{2z}$ の同時固有状態と、$\hat{\vec{J}}^2$, $\hat{J}_z$ の同時固有状態（$\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$ は合成角運動量）の二通りをとることができる。二種類の基底のあいだの変換をあらわに求めよ。

2. Landé の g 因子

原子中の電子を考えて、その軌道角運動量を $\hat{\vec{L}}$、スピン角運動量を $\hat{\vec{S}}$ とし、全角運動量を $\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ とする。

(1) 軌道角運動量の大きさ L とスピン角運動量の大きさ S を用いて、全角運動量の大きさ J がとりうる値を求めよ。

さて、全角運動量の演算子 $\hat{\vec{J}}^2$ と $\hat{\vec{J}}_z$ の規格化された固有状態を $|J, M\rangle$ と表す。このとき、

$$\langle J, M| \, \hat{S}_z \, |J, M\rangle = (g-1)\, \hbar M$$

によって、無次元数 g を定義する（Landé の g 因子）。

(2) Wigner-Eckard の定理

$$\langle J, M'| \, \hat{\vec{S}} \, |J, M\rangle = c\,(J, L, S)\, \langle J, M'| \, \hat{\vec{J}} \, |J, M\rangle$$

を仮定する（係数 c が M, M' によらないことに注意せよ）。このとき、

$$\langle J, M| \, \hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{S}} \, |J, M\rangle = c\,(J, L, S)\, \hbar^2 J\,(J+1)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 前問の結果をもとにして、Landé の g 因子を J, L, S を用いて決定せよ。

3. スピンふたつの系の基底状態

ふたつのスピン 1/2 の粒子 $\hat{\vec{S}}_1$, $\hat{\vec{S}}_2$ があり、Hamiltonian

$$H = -J\, \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 - h\left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right)$$

のもとで相互作用している。

(1) スピン 1/2 の粒子が 2 個ある場合の合成系の状態をすべて求めよ。

(2) 上式で記述される系の固有エネルギーと固有状態を求めよ。

(3) $h=0$ のとき、系の基底エネルギーと基底状態を求めよ。とくに、J の符号によって基底状態の個数が変化することを確認せよ（J の符号の違いは、物理的には強磁性・反強磁性の差異に対応する）。

(4) 対応する古典模型を考えて、その基底状態の性質について調べよ。とくに、量子系の場合のように J の符号によって基底状態の個数が変化するかどうか考えよ。