量子力学 II　演習問題 7

2017 年 5 月 23 日

1．生成演算子と消滅演算子

$\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ を、交換関係

$$\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\right] = 1$$

を満たす生成演算子および消滅演算子とする。$\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を数演算子とし、$|0\rangle$ を真空状態とする。また、f を解析的な 1 変数関数であるとする。このとき、以下の式が成り立つことを示せ。

(1) $\left[\hat{a},\, (\hat{a}^\dagger)^k\right] = k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$　(k は非負整数)

(2) $\left[\hat{a},\, f(\hat{a}^\dagger)\right] = f'(\hat{a}^\dagger)$

(3) $\hat{a}\, f(\hat{a}^\dagger)\, |0\rangle = f'(\hat{a}^\dagger)\, |0\rangle$

(4) $\hat{a}\hat{n} = (\hat{n} + \hat{I})\, \hat{a}$

(5) $\hat{a}\hat{n}^k = (\hat{n} + \hat{I})^k\, \hat{a}$　(k は非負整数)

(6) $\hat{a} f\,(\hat{n}) = f\,(\hat{n} + \hat{I})\, \hat{a}$

(7) $e^{-\mathrm{i}\theta\hat{n}} \hat{a} e^{\mathrm{i}\theta\hat{n}} = e^{\mathrm{i}\theta} \hat{a}$

2．Baker-Hausdorf の公式

演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ が、交換関係 $[\hat{A},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = [\hat{B},\, [\hat{A},\, \hat{B}]] = 0$ を満たすとき、

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\, \hat{B}]/2}$$

が成り立つ（Baker-Hausdorf の公式）。この公式を証明せよ。

ヒント：$\hat{F}\,(x) := e^{\hat{A}+x\hat{B}}$ として、$\hat{F}\,(x)$ を x について微分してみよ。

3．スクイズド状態

(1) 生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ の代わりに、それらの線形結合で定義されるエルミート演算子

$$\hat{a}_1 := \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2}, \quad \hat{a}_2 := \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2\mathrm{i}}$$

を考える（直交位相振幅）。消滅演算子の固有状態であるコヒーレント状態について $(\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle)$、$\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ の標準偏差 Δa_1, Δa_2 を計算せよ。また、$\Delta a_1 = \Delta a_2$ であり、かつその積は不確定性関係が与える下限を達成していることを確認せよ。

不確定性関係を満たしつつ、 $\hat{a}_1$ と $\hat{a}_2$ の一方の精度を犠牲にして、他方の精度を向上させることは可能である。そのような状態はスクイズド状態と呼ばれ、演算子

$$\hat{b} := e^r \hat{a}_1 + e^{-r} \hat{a}_2 = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r \quad (r \in \mathbb{R})$$

の固有状態として与えられる ($\hat{b}\,|S\rangle = \beta\,|S\rangle$)。

(2)　スクイズド状態 $|S\rangle$ について、$\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ の標準偏差を計算し、不確定性関係を満足しながらも（$r \neq 0$ のときには）一方の精度が向上していることを確認せよ。

さて、以下ではスクイズド状態 $|S\rangle$ を具体的に決定したい。

(3)　演算子 $\hat{b}$ がボソンの交換関係を満たすことを示せ。

(4)　演算子 $\hat{b}$ に対する変位演算子を $\hat{D}_{\mathrm{b}}(\beta) := e^{\beta\hat{b}^\dagger - \beta^*\hat{b}}$ としたとき、

$$|S\rangle = \hat{D}_{\mathrm{b}}(\beta)\,|0\rangle_{\mathrm{b}}$$

が成り立つことを示せ。ただし $|0\rangle_{\mathrm{b}}$ は、$\hat{b}\,|0\rangle_{\mathrm{b}} = 0$ を満足する演算子 $\hat{b}$ の真空状態である。

(5)　β と r を用いて適当に α を定義すると、

$$|S\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle_{\mathrm{b}}$$

が成り立つ。ただし、$\hat{D}(\alpha) := e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ は演算子 $\hat{a}$ に対する変位演算子である。α を決定せよ。

(6)　真空状態の定義式 $\hat{b}\,|0\rangle_{\mathrm{b}} = 0$ から、

$$|0\rangle_{\mathrm{b}} = \frac{e^{-\gamma\,(\hat{a}^\dagger)^2}}{\sqrt{\cosh r}}\,|0\rangle\,, \quad \gamma := \frac{1}{2}\tanh r$$

となることを示せ。ただし、$|0\rangle$ は演算子 $\hat{a}$ の真空状態である。こうしてスクイズド状態が決定されたことになる。

(7)　スクイズド状態 $|S\rangle$ に対する光子数 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の期待値を求めよ。