量子力学 II　演習問題 9

2017 年 6 月 20 日

1. 摂動論（時間に依存しない場合）

ハミルトニアンが $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ であったとして、$g\hat{V}$ を $\hat{H}_0$ に対する摂動とみなしたときの摂動論を考える。非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有値を $E_n^{(0)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ として、対応する固有状態を $|n\rangle$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。また、$\hat{H}_0$ には縮退がない場合を考える。このとき、$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ の固有値 E_n と対応する固有状態 $|\psi_n\rangle$ を g について展開して、

$$
\begin{aligned}
E_n &= E_n^{(0)} + gE_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \cdots \\
|\psi_n\rangle &= |n\rangle + g\,|\psi_n^{(1)}\rangle + g^2\,|\psi_n^{(2)}\rangle + \cdots
\end{aligned}
$$

と表したとき、

$$
E_n^{(1)} = \langle n|\hat{V}|n\rangle \tag{1}
$$

$$
|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n} |m\rangle \frac{1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \langle m|\hat{V}|n\rangle \tag{2}
$$

$$
E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \langle n|\hat{V}|m\rangle \frac{1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \langle m|\hat{V}|n\rangle \tag{3}
$$

と与えられる。上記の摂動論の公式 (1)・(2)・(3) を導出せよ。

2. 非調和振動子

1 次元的に運動する量子力学的粒子で、ハミルトニアンが

$$
\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + g\hat{x}^4
$$

と与えられるものを考える。

(1) 生成消滅演算子を

$$
\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p},\ \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}
$$

と定義したとき、交換関係 $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ が成り立つことを示せ。また、ハミルトニアンを生成消滅演算子を用いて表せ。

(2) $g = 0$ のとき、エネルギースペクトルと対応する固有状態系を求めよ。

(3) g が十分に小さいとして $g\hat{x}^4$ を摂動項として扱い、n 番目のエネルギー準位の補正を g について 1 次まで計算せよ。

(4) 前問の計算を、g について 2 次まで計算せよ。

3．外場のかかった無限井戸

1 次元の無限に高い井戸型ポテンシャルのなかを運動する量子力学的粒子を考える。すなわち、ハミルトニアンを $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m + U(\hat{x})$ として、ポテンシャルは

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < L/2) \\ \infty & (|x| > L/2) \end{cases}$$

である。この系に $\hat{V} = F\hat{x}$ で表される一様な外場が加わったとき、$\hat{V}$ を $\hat{H}_0$ に対する摂動と考えて、エネルギー準位の補正を求めたい。

(1) 非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_0$ のエネルギースペクトルと対応する固有状態系を求めよ。

(2) n 番目のエネルギー準位の補正を F について 1 次まで計算せよ。

(3) 基底エネルギーの補正を F について 2 次まで計算せよ。

注意　収束する無限級数は解答のなかに残してよい（あるいは計算機で数値を求めよ）。