量子力学 II　演習問題 4

2018 年 5 月 6 日

1　空間並進対称性と運動量保存

1 次元空間を運動する粒子を考える。位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ が交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ を満たすとし、ハミルトニアンが $\hat{x}$、$\hat{p}$、および時刻 t の滑らかな関数 $H(\hat{x},\hat{p};t)$ によって与えられるとする。 また、時刻 t での状態 $|\psi\rangle$ における物理量 $\hat{A}$ の期待値を $\left\langle \hat{A} \right\rangle_\psi (t)$ と表記する。

(1) 任意の時刻 t において、以下の 2 つの命題 (A) と (B) が同値であることを示せ。

(A): $[\hat{p},H(\hat{x},\hat{p};t)]=0$

(B): 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{p}\rangle_\psi(t)=0$

(2) 空間並進演算子 $\hat{T}(a)$ を次のように定義する。(この大問においては常に a を実数とする。)

$$\hat{T}(a) := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a\hat{p}}$$

このとき、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の交換関係を用いて、次の等式を示せ。

$$\hat{T}^\dagger(a)\hat{x}\hat{T}(a)=\hat{x}+a$$

また、$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$ なる $|x\rangle$ に対して $\hat{T}(a)\,|x\rangle$ が $\hat{x}$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

(3) $f(\hat{x})$ が $\hat{x}$ の滑らかな関数であるとき、次の等式を示せ。

$$\hat{T}^\dagger(a)f(\hat{x})\hat{T}(a)=f(\hat{x}+a)$$

(4) 任意の a に対して $H(\hat{x}+a,\hat{p};t)=H(\hat{x},\hat{p};t)$ が成立するとき、系は空間並進対称性を持つ、という。この条件は (3) で示した等式を用いると次のように書ける。

(C): 任意の a に対して $\hat{T}^\dagger(a)H(\hat{x},\hat{p};t)\hat{T}(a)=H(\hat{x},\hat{p};t)$

このとき、任意の時刻 t において命題 (A) と (C) が同値であることを示せ。但し、(C) における a は一般には微小量とは限らないことに注意せよ。

2 二準位系[1]におけるパリティ

(1) $\hat{H}$ をハミルトニアン、$\hat{\pi}$ をパリティ演算子とし、$\left[\hat{H}, \hat{\pi}\right] = 0$ が成り立つとする。また、$|n\rangle$ を、固有値 E_n を持つ $\hat{H}$ の縮退していない固有状態とする。このとき、$|n\rangle$ は $\hat{\pi}$ の固有状態でもあることを示せ。

左右に並べられた 2 つの量子ドット[2] が結合しており、その中に粒子が一つある量子系を考える。粒子が左の量子ドットにある状態を $|L\rangle$、右の量子ドットにある状態を $|R\rangle$ とすると、ヒルベルト空間は 2 次元であり、$|L\rangle$ と $|R\rangle$ は正規直交完全系をなす。この系のハミルトニアン $\hat{H}$ は次のように与えられる。

$$\hat{H} = \epsilon(|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R|) - \Delta(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|) \qquad (\epsilon, \Delta > 0)$$

ここで、ϵ は各量子ドットのポテンシャルエネルギーに相当し、Δ は量子ドットの結合によるトンネル効果の大きさを表している。
ここで、パリティ演算子 $\hat{\pi}$ を次のように定義する。

$$\hat{\pi} := |L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|$$

(2) $\hat{H}$ の固有値と対応する固有状態を求めよ。更に、$\left[\hat{H}, \hat{\pi}\right] = 0$ を示した上で、エネルギー固有状態が $\hat{\pi}$ の固有状態でもあることを示せ。

(3) 時刻 t における状態を $|\psi(t)\rangle$ と表す。初期状態を $|\psi(0)\rangle = |L\rangle$ とするとき、時刻 $t(>0)$ において $\{|L\rangle\langle L|, |R\rangle\langle R|\}$ で表される測定を行ったときに状態 $|L\rangle$ に見出される確率を求めよ。

(4) 量子ドット同士の結合を弱めて $\Delta \to 0$ とする極限においては (3) で求めた確率は t によらずに 1 となることを確認せよ。このことは $|L\rangle$ が定常状態となっていることを表すが、$|L\rangle$ は明らかにパリティ対称性を破っている。この事実が (1) で示した命題と矛盾していないことを説明せよ。

[1] 二準位系とは、2 つのエネルギー固有値を持つ系、または 2 つの一次独立なエネルギー固有状態を持つ系のことである。

[2] 量子ドットとは、ポテンシャル障壁によって粒子を 3 次元空間全方位について狭い領域に閉じ込める構造であり、この問題においては、$|L\rangle$ と $|R\rangle$ は大きさを持たないとみなせるほど狭い領域に局在した状態を表す。

3　時間反転演算子

$|\alpha\rangle \to |\tilde{\alpha}\rangle = \hat{\theta}\,|\alpha\rangle\,,\,|\beta\rangle \to \left|\tilde{\beta}\right\rangle = \hat{\theta}\,|\beta\rangle$ なる変換 $\hat{\theta}$ は、以下が成立するとき反ユニタリーであるという。

$$\begin{cases} \left\langle\tilde{\beta}\middle|\tilde{\alpha}\right\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* & \text{(1a)} \\ \hat{\theta}(c_1\,|\alpha\rangle + c_2\,|\beta\rangle) = c_1^*\hat{\theta}\,|\alpha\rangle + c_2^*\hat{\theta}\,|\beta\rangle & \text{(1b)} \end{cases}$$

(1) 演算子 $\hat{\theta}$ がユニタリー演算子 $\hat{U}$ と複素共役演算子 $\hat{K}$ を用いて $\hat{\theta} = \hat{U}\hat{K}$ と表されるとき、$\hat{\theta}$ は反ユニタリーであることを示せ。
但し、$\hat{K}$ のケットに対する作用は次のようなものである。$|\alpha\rangle$ が正規直交基底 $\{|e_i\rangle\}$ を用いて $|\alpha\rangle = \sum_i \langle e_i|\alpha\rangle\,|e_i\rangle$ と展開されるとき、
$\hat{K}\,|\alpha\rangle = \hat{K}\sum_i \langle e_i|\alpha\rangle\,|e_i\rangle = \sum_i \langle e_i|\alpha\rangle^*\,\hat{K}\,|e_i\rangle = \sum_i \langle e_i|\alpha\rangle^*\,|e_i\rangle$
すなわち、$\hat{K}$ は右側にある係数をその複素共役に変え、基底ケットを変化させない。故に $\hat{K}$ の作用はケットを展開する基底に依存することに注意せよ。

(2) $\hat{\theta}$ が反ユニタリーであるとき、任意の線形演算子 $\hat{A}$ に対して、次の等式を示せ。

$$\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle = \left\langle\tilde{\alpha}\middle|\hat{\theta}\hat{A}^\dagger\hat{\theta}^{-1}\middle|\tilde{\beta}\right\rangle$$

(3) 時間反転演算子 $\hat{\Theta}$ を導入する。$\hat{\Theta}$ は反ユニタリーであることが知られている。状態 $|\alpha\rangle$ についての位置 $\hat{\vec{\mathbf{r}}}$ の期待値と、時間反転した状態 $|\tilde{\alpha}\rangle := \hat{\Theta}\,|\alpha\rangle$ についての位置の期待値は等しいという要請 $\langle\alpha|\hat{\vec{\mathbf{r}}}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\hat{\vec{\mathbf{r}}}|\tilde{\alpha}\rangle$ を用いて、$\hat{\vec{\mathbf{r}}}\,|\vec{\mathbf{r}}\rangle = \vec{\mathbf{r}}\,|\vec{\mathbf{r}}\rangle$ なる $|\vec{\mathbf{r}}\rangle$ に対して $\hat{\Theta}\,|\vec{\mathbf{r}}\rangle$ が位相の自由度を除いて $|\vec{\mathbf{r}}\rangle$ に等しいことを示せ。

(4) 以下では、$\hat{\Theta}\,|\vec{\mathbf{r}}\rangle = |\vec{\mathbf{r}}\rangle$ として位相を選ぶことにする。このとき、状態 $|\psi\rangle$ に対して、時間反転した状態の波動関数 $\tilde{\psi}(\vec{\mathbf{r}}) := \langle\vec{\mathbf{r}}|\left(\hat{\Theta}\,|\psi\rangle\right)$ を、元の状態の波動関数 $\psi(\vec{\mathbf{r}}) := \langle\vec{\mathbf{r}}|\psi\rangle$ を用いて表せ。