量子力学II　演習問題 5

2018 年 5 月 11 日

1　角運動量演算子

角運動量演算子 $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$ は次の交換関係を満たす。

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z, \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{L}_x, \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar\hat{L}_y$$

また、$\hat{\mathbf{L}}^2$ および $\hat{L}_\pm$ は次のように定義される。

$$\hat{\mathbf{L}}^2 := \hat{L_x^2} + \hat{L_y^2} + \hat{L_z^2}, \quad \hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$$

(1) 次の交換関係を示せ。

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm, \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}^2} &= \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z \\ &= \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z \end{aligned}$$

次に、以下で与えられる、$\hat{\mathbf{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態 $|L, M\rangle$ を考える。
(L, M は整数、$L \geq 0, M = L, L-1, \cdots, -L$)

$$\hat{\mathbf{L}}^2 |L, M\rangle = \hbar^2 L(L+1) |L, M\rangle, \quad \hat{L}_z |L, M\rangle = \hbar M |L, M\rangle$$

(3) 位相因子の自由度を除いて次の等式が成り立つことを示せ。

$$\langle L', M'| \hat{L}_\pm |L, M\rangle = \hbar\sqrt{(L \mp M)(L \pm M + 1)}\delta_{L',L}\delta_{M',M\pm1}$$

(4) $L = 1$ のとき、$\hat{L}_\pm$ および $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$、$\hat{L}_z$ の行列表示を具体的に書き下せ。

2　球面調和関数

角運動量の固有関数として現れる、球面調和関数の性質を調べよう。講義ノートで与えられた球面調和関数は次式と等価である。(L, M は整数、$L \geq 0, -L \leq M \leq L$)

$$Y_L^M(\theta,\phi) = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}\frac{(L-M)!}{(L+M)!}} P_L^M(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}M\phi}$$

ここで、$P_L^M(x)$ はルジャンドルの陪多項式と呼ばれ、次のルジャンドルの陪微分方程式を満たす。

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_L^M(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_L^M(x) + \left[L(L+1) - \frac{M^2}{1-x^2}\right]P_L^M(x) = 0$$

また、ロドリーグの公式を用いると、次のように表される。

$$P_L^M(x) = \frac{(1-x^2)^{M/2}}{2^L L!}\frac{\mathrm{d}^{L+M}}{\mathrm{d}x^{L+M}}\left(x^2-1\right)^L$$

ここで、大問 1 で定義した $\hat{L}_\pm$ の波動関数に対する作用を極座標表示すると、次のようになる。

$$\hat{L}_\pm = \pm\hbar\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

ここでは、ルジャンドルの陪多項式の性質を用いて、$\hat{L}_\pm$ の球面調和関数に対する作用が $\{|L.M\rangle\}$ を基底とする $\hat{L}_\pm$ の行列要素を再現することを確認しよう。なお、以下では $|M| > L$ ならば $P_L^M(x) = 0$ とする。

(1) P_L^M に関する次の漸化式を示せ。

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_L^M(x) = -MxP_L^M(x) + \sqrt{1-x^2}P_L^{M+1}(x)$$

(2) P_L^M に関する次の漸化式を示せ。(ヒント：(1) で示した式の両辺を微分してみよ。)

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_L^M(x) = MxP_L^M(x) - (L+M)(L-M+1)\sqrt{1-x^2}P_L^{M-1}(x)$$

(3) Y_L^M に関する次の漸化式を示せ。(ヒント：(1) の結果を用いよ。)

$$\hat{L}_+Y_L^M(\theta,\phi) = \hbar\sqrt{(L-M)(L+M+1)}Y_L^{M+1}(\theta,\phi)$$

(4) Y_L^M に関する次の漸化式を示せ。(ヒント：(2) の結果を用いよ。)

$$\hat{L}_-Y_L^M(\theta,\phi) = \hbar\sqrt{(L+M)(L-M+1)}Y_L^{M-1}(\theta,\phi)$$

3　Schwinger-boson[1]表示

角運動量は独立な 2 種類の調和振動子 a, b の自由度を用いて表現することができる。量子力学 I で学習したように、調和振動子は消滅生成演算子を導入して解析することができる (不慣れな場合は本講義の講義ノートの第 6 章を参照せよ)。調和振動子 a の消滅演算子を $\hat{a}$、生成演算子を $\hat{a}^\dagger$ とするとこれらは交換関係 $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ を満たす。同様に調和振動子 b の消滅演算子を $\hat{b}$、生成演算子を $\hat{b}^\dagger$ とするとこれらは交換関係 $\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1$ を満たす。2 つの調和振動子は独立であり、$\left[\hat{a}, \hat{b}\right] = \left[\hat{a}, \hat{b}^\dagger\right] = 0$ が成立する。a, b についての個数演算子はそれぞれ $\hat{n}_a := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ および $\hat{n}_b := \hat{b}^\dagger\hat{b}$ で与えられ、基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}\,|0\rangle = \hat{b}\,|0\rangle = 0$ によって定義される。これらの演算子は次のようにして "角運動量演算子" と対応づけられる。

$$\hat{L}_+^{SB} = \hat{a}^\dagger\hat{b},\ \ \hat{L}_-^{SB} = \hat{b}^\dagger\hat{a},\ \ \hat{L}_z^{SB} = \frac{1}{2}(\hat{n}_a - \hat{n}_b),\ \ \left(\hat{\mathbf{L}}^{SB}\right)^2 = \hat{L}_-^{SB}\hat{L}_+^{SB} + \left(\hat{L}_z^{SB}\right)^2 + \hat{L}_z^{SB}$$

(1) 消滅生成演算子の交換関係を用いて、上で定義した "角運動量演算子" が以下の交換関係を満たしていることを示せ。

$$\left[\hat{L}_z^{SB}, \hat{L}_\pm^{SB}\right] = \pm\hat{L}_\pm^{SB}, \qquad \left[\hat{L}_+^{SB}, \hat{L}_-^{SB}\right] = 2\hat{L}_z^{SB}$$

次に、$|L, M\rangle^{SB}$ を以下のように定義する。(L, M は整数、$L \geq 0, M = L, L-1, \cdots, -L$)

$$|L, M\rangle^{SB} := \frac{(\hat{a}^\dagger)^{L+M}}{\sqrt{(L+M)!}}\frac{(\hat{b}^\dagger)^{L-M}}{\sqrt{(L-M)!}}\,|0\rangle$$

(2) 消滅生成演算子の交換関係を用いて、$|L, M\rangle^{SB}$ が次の性質を満たしていることを示せ。

$$\left(\hat{\mathbf{L}}^{SB}\right)^2 |L, M\rangle^{SB} = L(L+1)\,|L, M\rangle^{SB}, \qquad \hat{L}_z^{SB}\,|L, M\rangle^{SB} = M\,|L, M\rangle^{SB}$$

(3) 消滅生成演算子の交換関係を用いて、$|L, M\rangle^{SB}$ が次の性質を満たしていることを示せ。

$$\hat{L}_\pm^{SB}\,|L, M\rangle^{SB} = \sqrt{(L \mp M)(L \pm M + 1)}\,|L, M \pm 1\rangle^{SB}$$

[1] 量子力学においては同種粒子は原理的に区別不可能である。同種粒子からなる多体状態においては、2 つの粒子の交換に対して、アーベリアンと呼ばれる標準的な系においては波動関数に位相因子がかかる。特に空間次元が 3 次元の場合は、粒子の交換に伴う位相の変化は 0 または π となり、それぞれ場合について、粒子はボゾンおよびフェルミオンと呼ばれる。この問題においては、調和振動子において消滅生成演算子を導入したときのエネルギー量子がボゾンとしての性質を持つためにこのように呼ばれる。