量子力学 II 演習問題 3

2019 年 6 月 19 日

1　トンネル効果・量子反射

1 次元空間をポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +V_0 & (0 < x < L \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{ それ以外 }) \end{cases} \tag{1.1}$$

の下で運動する質量 m の粒子を考える。ここで $V_0 > 0$ とする。

1.1

エネルギー固有値 E に対するシュレーディンガー方程式の解を

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A_1 e^{+ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} & (x < 0 \text{ のとき }) \\ A_2 e^{+ik_0 x} + B_2 e^{-ik_0 x} & (0 \leq x \leq L \text{ のとき }) \\ A_3 e^{+ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x} & (x \geq L \text{ のとき }) \end{cases} \tag{1.2}$$

と書いたとき、$x = 0$ と $x = L$ における接続条件から $A_1, B_1, A_3 e^{+ik_1 L}, B_3 e^{-ik_1 L}$ を A_2, B_2 の線型結合で表せ。

1.2

以下では $x = -\infty$ から x の正方向に粒子を入射した場合を考え、$A_1 = 1, B_3 = 0$ とする。このとき、ある複素数 F をもちいて

$$A_2 = (k_0 + k_1) e^{-ik_0 L} \cdot F, \quad B_2 = (k_0 - k_1) e^{+ik_0 L} \cdot F \tag{1.3}$$

と書けることを示し、F を求めよ。

1.3

$E < V_0$ の場合を考え $\kappa := |k_0|, k_0 = i\kappa$ とする。粒子の透過率 $T = |A_3|^2$ と反射率 $R = |B_1|^2$ を求めよ。また、$T \neq 0$ かつ $T + R = 1$ であることを確認せよ。

1.4

各領域における確率の流れの密度を計算せよ。$L \to \infty$ では T, R および $0 \leq x \leq L$ の領域における粒子の存在確率 $\left|\psi(x)\right|^2$ はどのようになるか。

1.5

次に、$E > V_0$ の場合を考える。このときの粒子の透過率 $T = |A_3|^2$ と反射率 $R = |B_1|^2$ を求めよ。$R = 0$ となるのはどのようなときか。

2　振動定理

1 次元空間をポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|x| \leq L \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{ それ以外 }) \end{cases} \tag{2.1}$$

の下で運動する質量 m の粒子を考える。ここで $V_0 > 0$ とする。

2.1

エネルギー固有値 E の固有関数を

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A_- e^{+ik_1 x} + B_- e^{-ik_1 x} & (x < -L \text{ のとき }) \\ A_0 e^{+ik_0 x} + B_0 e^{-ik_0 x} & (|x| \leq L \text{ のとき }) \\ A_+ e^{+ik_1 x} + B_+ e^{-ik_1 x} & (x > L \text{ のとき }) \end{cases} \tag{2.2}$$

と表したとき、k_0, k_1 の値を計算し、$x = \pm L$ における接続条件から $A_\pm e^{\pm ik_1 L}, B_\pm e^{\mp k_1 L}$ (複合同順) を A_0, B_0 を用いて表せ。

2.2

$E < 0$ のとき $\kappa := |k_1|$, $k_1 = -i\kappa$ として、条件 $\lim_{x\to\pm\infty} \psi_L(x) = 0$ から κ および k_0 の満たすべき関係を求めよ。

2.3

第 n 励起状態が存在するために V_0 と L が満たすべき条件を求め、第 n 励起状態の波数 $k_0^{(n)}$ が

$$n\frac{\pi}{2} < k_0^{(n)} L < (n+1)\frac{\pi}{2} \tag{2.3}$$

を満たすことを示せ。また、第 n 励起状態の固有関数 $\psi_n(x)$ を図示し、それがノードをちょうど n 個持つことを確認せよ。

2.4

任意の $E > 0$ に対し、規格化されていない固有関数 $\psi_E(x)$ が存在することを示せ。また、各エネルギー固有状態が 2 重に縮退していることを確認せよ。