量子力学 II 演習問題 4

2019 年 7 月 25 日

1　保存量と対称性変換

1.1

任意の線形演算子 $\hat{R}$ は、エルミート演算子 $\hat{R}_1, \hat{R}_2$ を用いて $\hat{R} = \hat{R}_1 + i\hat{R}_2$ と書けることを示せ。また、エルミート演算子 $\hat{H}$ に対し $\left[\hat{H}, \hat{R}\right] = 0$ ならば $\left[\hat{H}, \hat{R}_1\right] = \left[\hat{H}, \hat{R}_2\right] = 0$ を示せ。

1.2

ユニタリ演算子 $\hat{U}$ に対して、$\hat{P} := -i \log \hat{U}$ が定義できエルミート演算子になることを示せ。つまり、$\hat{U} = e^{i\hat{P}}$ をみたすエルミート演算子 $\hat{P}$ を求めよ。[*1][*2]

1.3

エルミート演算子 $\hat{P}$ に対して $\hat{T}(\lambda) := e^{i\hat{P}\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ はユニタリ演算子だから、ユニタリ演算子とエルミート演算子は 1 対 1 に対応することがわかる。[*3]エルミートなハミルトニアン $\hat{H}$ に対し

$$\left[\hat{H}, \hat{P}\right] = 0 \iff \left[\hat{H}, \hat{T}(\lambda)\right] = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を示せ。[*4]

[*1] ヒント：$\hat{U}$ を対角化し、その結果を用いて $\hat{U} = e^{i\hat{P}}$ となる $\hat{P}$ を構成せよ。

[*2] 注意：一般に演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対しては $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \neq e^{\hat{A}+\hat{B}}$ である。

[*3] 厳密には 2π の整数倍をエルミート演算子に加える自由度が残されている。

[*4] ヒント：λ は任意の実数を取りうることに注意。

ユニタリ演算子は系の変換を表すから、上記の関係は系の保存量 $\hat{P}$ が対応する対称性変換 $\hat{T}(\lambda) = e^{i\hat{P}\lambda}$ を生成することを表している。

2 反ユニタリ演算子

反ユニタリ演算子とは任意の $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して

$$\left\langle \hat{A}\psi \middle| \hat{A}\phi \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \phi \right\rangle^* \tag{2.1}$$

が成り立ち、逆演算子を持つような演算子 $\hat{A}$ のことである。ここで $|\hat{A}\psi\rangle \coloneqq \hat{A}|\psi\rangle$ である。反ユニタリ演算子は反線形である[*5]。すなわち、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$ に対して

$$\hat{A}\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big) = \alpha^*\hat{A}|\psi_1\rangle + \beta^*\hat{A}|\psi_2\rangle \tag{2.2}$$

を満たす。

2.1

$\hat{K}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の基底 $\{|x\rangle\}$ に対し $\hat{K}|x\rangle = |x\rangle$ と作用する反線形演算子とする。$\hat{K}$ が反ユニタリ演算子であることを示せ。[*6]

2.2

任意の 2 つの反ユニタリ演算子の積はユニタリ演算子であることを示せ。

2.3

反ユニタリ演算子 $\hat{A}_0$ を任意に選び固定したとき、任意の反ユニタリ演算子 $\hat{A}$ は $\hat{A}_0$ とあるユニタリ演算子 $\hat{U}_A$ を用いて $\hat{A} = \hat{U}_A\hat{A}_0$ と書けることを示せ。[*7]

[*5] ウィグナーの定理より

[*6] もちろん $\hat{U}|x\rangle = |x\rangle$ と作用する線形演算子も考えることができる。ウィグナーの定理と合わせると、内積の絶対値を保つ写像は 1. 基底への作用、2. 線形性または反線形性の 2 つによって特徴付けられる。

[*7] ヒント：反ユニタリ演算子には逆が存在することと、問題 2.2 の結果を用いよ。

2.4

反ユニタリ演算子 $\hat{A}$ についての方程式 $\hat{A}\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left|\lambda\right\rangle$ の、異なる λ に対する解 $\left|\lambda\right\rangle, \left|\lambda'\right\rangle$ $(\lambda \neq \lambda')$ は必ずしも線型独立ではないことを示せ。[*8]

2.5

線形演算子 $\hat{S}$ が反ユニタリ演算子 $\hat{A}$ と交換関係 $\left[\hat{S}, \hat{A}\right] = 0$ を満たすとする。このとき、λ が $\hat{S}$ の固有値ならば λ^* も S の固有値であることを示せ。また、$\hat{S}$ の固有値 λ に関する固有空間の次元と λ^* に関する固有空間の次元は等しいことを示せ。

2.6

任意の $\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle \in \mathcal{H}$ に対して $\left\langle \hat{A}\psi \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \mathcal{A}(\phi) \right\rangle$ となるような（線形、反線形とは限らない）写像 $\mathcal{A}$ は存在しないことを示せ。[*9]

2.7

このため、反線形演算子 $\hat{V}$ のエルミート共役 $\hat{V}^\dagger$ は $\left\langle \hat{V}\psi \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \hat{V}^\dagger \phi \right\rangle^*$ を満たす演算子として定義される。この定義の下で反ユニタリ演算子 $\hat{A}$ に対して $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$ を示せ。

3　空間反転・時間反転

位置演算子 $\hat{x}$ の固有ケット $\{\left|x\right\rangle\}$ で張られるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ において、空間反転演算子 $\hat{P}$ と瞬間的な時間反転演算子 $\hat{T}$[*10]を

$$\hat{P}\hat{x}\hat{P}^{-1} = -\hat{x}, \quad \hat{P}\hat{p}\hat{P}^{-1} = -\hat{p}, \tag{3.1}$$

$$\hat{T}\hat{x}\hat{T}^{-1} = \hat{x}, \quad \hat{T}\hat{p}\hat{T}^{-1} = -\hat{p} \tag{3.2}$$

となり、内積の絶対値を保存する線形または反線形の演算子として定義する。

[*8] ヒント：$\hat{A}\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left|\lambda\right\rangle$ を満たす $\left|\lambda\right\rangle$ から、$\hat{A}\left|\lambda'\right\rangle = \lambda'\left|\lambda'\right\rangle$ を構成せよ。

[*9] ヒント：存在したとして、ψ に様々な状態を代入して矛盾を導け。

[*10] 講義ノートの時間反転"演算子"$\hat{\Theta}(t)$ と、瞬間的な時間反転演算子 $\hat{T}$ の関係は $\hat{\Theta}(t)\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{T}\left|\psi(-t)\right\rangle$ である。

3.1

上記の定義から $\hat{P}$ が線形演算子であること、$\hat{T}$ が反線形演算子であることを導け。[*11] またそれぞれについてユニタリ性、反ユニタリ性を確認せよ。

3.2

$\hat{P}$ および $\hat{T}$ の $|x\rangle$, $|p\rangle$、運動量表示の波動関数 $\psi(t,p)$、角運動量演算子 $\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}$ に対する作用を位相の不定性も含めて求めよ。[*12]

3.3

$\hat{P}^2 = e^{i\theta}\hat{I}, \hat{T}^2 = \hat{I}$ を示せ。ここで θ は実数であり $\hat{I}$ は恒等演算子である。

3.4

U をユニタリ演算子、A を反ユニタリ演算子とする。

交換関係 $\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ $(i,j,k = 1,2,3)$ が成り立つならば、ユニタリ演算子 $\hat{S}$ によって $\hat{U} \mapsto \hat{S}\hat{U}$ や $\hat{A} \mapsto \hat{S}\hat{A}$ とする自由度を除いて、

$$\hat{U}\hat{J}_i\hat{U}^{-1} = \hat{J}_i, \quad \hat{A}\hat{J}_i\hat{A}^{-1} = -\hat{J}_i \tag{3.3}$$

となることを示せ。ここで、リー代数の性質から

$$\hat{A}\hat{J}_i\hat{A}^{-1} = \sum_k D_{ik}\hat{J}_k, \quad D_{ik} \in \mathbb{C} \tag{3.4}$$

と書けることを用いて良い。[*13]

この結果から、定義 (3.2) によって時間反転演算子 $\hat{T}$ のスピン部分への作用がユニタリ変換の自由度を除いて決定されることがわかる。

[*11] ヒント：位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ は交換関係 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ によって関係付けられている。

[*12] ヒント：ケット $\hat{S}\,|\psi\rangle$ を $\hat{U}$ で座標変換すると、$\hat{U}\hat{S}\,|\psi\rangle = (\hat{U}\hat{S}\hat{U}^{-1})\hat{U}\,|\psi\rangle$ となる。したがって、$\hat{U}$ による座標変換のもとで、演算子 $\hat{S}$ は $\hat{U}\hat{S}\hat{U}^{-1}$ へと変換する。

[*13] ヒント：行列 D_{ik} の行ベクトル $\vec{D}_i = (D_{i1}, D_{i2}, D_{i3})^T$ が満たすべき関係を求めよ。