量子力学 II 演習問題 6

2019 年 6 月 19 日

1　生成消滅演算子

調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}, \quad \left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar \tag{1.1}$$

で与えられる。

1.1

古典論における調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{1}{2m}\left(m\omega x - ip\right)\left(m\omega x + ip\right) \tag{1.2}$$

と因数分解することができる。そこで量子論において

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\right)\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right) + f(\hat{x}, \hat{p}) \tag{1.3}$$

と表したとき、$f(\hat{x}, \hat{p})$ を求めよ。

1.2

ある実数 A を用いて

$$\hat{a} \coloneqq A\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right) \tag{1.4}$$

と定義する。このとき交換子 $\left[a, a^\dagger\right]$ を計算せよ。

1.3

(1.4) において $A = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ として生成消滅演算子 $\hat{a}$ を定義し、個数演算子を $\hat{N} \coloneqq a^\dagger a$ で定義する。個数演算子 $\hat{N}$ が整数でない固有値 α を持つと、ハミルトニアン $\hat{H}$ にいくらでも小さいエネルギー固有値が存在してしまうことを示せ。

2　コヒーレント状態

1 次元調和振動子系に対してコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ を消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態として、固有値方程式 $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$ で定義する。

2.1

エネルギー固有状態に関する任意の物理量の期待値は時間に依存しないことを示せ。

上記の設問より特に、調和振動子のエネルギー固有状態に関する位置演算子 $\hat{x}$ や運動量演算子 $\hat{p}$ の期待値は振動しないことがわかる。

2.2

運動量演算子 $\hat{p}$ と長さの次元を持つ実数 l に対し、$e^{i\frac{\hat{p}l}{\hbar}}\,|0\rangle$ がコヒーレント状態であることを示せ。また、この状態の消滅演算子 $\hat{a}$ に関する固有値は何か。

2.3

時刻 $t = 0$ に系の状態がコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ であったとき、その後の時刻においても系はコヒーレント状態にある。時刻 t での系の状態を $|\alpha(t)\rangle$ とし、$\alpha(t)$ を $\hat{a}\,|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\,|\alpha(t)\rangle$ で定めるとき $\alpha(t)$ を求めよ。ここで、$\alpha \in \mathbb{R}$ とする。

2.4

上で求めたコヒーレント状態 $|\alpha(t)\rangle$ における、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の期待値 $\bar{x}(t), \bar{p}(t)$ を求めよ。

2.5

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の運動量表示の波動関数 $\tilde{\psi}_\alpha(p)$ を求めよ。

3　スクイーズド状態

不確定性関係を満たしながらも、$\hat{x}$ または $\hat{p}$ の一方を犠牲にしてもう一方ができるだけ確定した状態を構成することを考える。

状態 $\left|\psi\right\rangle$ が位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ に対して、最小不確定性関係

$$\left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{x})^2\middle|\psi\right\rangle \left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{p})^2\middle|\psi\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{3.1}$$

$$\Delta\hat{x} \coloneqq \hat{x} - x_0, \quad \Delta\hat{p} \coloneqq \hat{p} - p_0, \quad x_0 \coloneqq \left\langle\psi\middle|\hat{x}\middle|\psi\right\rangle, \quad p_0 \coloneqq \left\langle\psi\middle|\hat{p}\middle|\psi\right\rangle \tag{3.2}$$

を満たすための必要十分条件は、ある実数 α が存在して

$$\Delta\hat{p}\left|\psi\right\rangle = \frac{i\hbar}{2\sigma^2}\Delta\hat{x}\left|\psi\right\rangle \tag{3.3}$$

となることであった。ここで、$\sigma^2 \coloneqq \left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{x})^2\middle|\psi\right\rangle$ である。

3.1

生成消滅演算子

$$\hat{a} \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\right) \tag{3.4}$$

の線形結合 $\hat{b} \coloneqq \hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger\sinh r$ $(r \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ によって、条件 (3.3) を

$$\hat{b}\left|\psi\right\rangle = \beta\left|\psi\right\rangle \tag{3.5}$$

と表したとき $\tanh r$ および β を求めよ。コヒーレント状態における位置の分散を $\sigma_0^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ として良い。

3.2

(3.5) より、$b\ket{0}_b = 0$ となる状態 $\ket{0}_b$ が構成できれば、コヒーレント状態と同様にして (3.5) を満たす状態 $\ket{\psi}$ を

$$\ket{\psi} = \hat{D}(\beta)\ket{0}_b, \quad \hat{D}(\beta) := e^{\beta\hat{b}^\dagger - \beta^*\hat{b}} \tag{3.6}$$

として構成できる。そこで、$\ket{0}_b$ を構成したい。個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態を $\{\ket{n}\}_n$ として

$$\ket{0}_b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ket{n} \tag{3.7}$$

と展開したとき、展開係数 c_n $(n \geq 1)$ を c_0 を用いて表せ。[*1]

3.3

$\hat{a}^\dagger$ からなる演算子 $f(\hat{a}^\dagger)$ を用いて、$\ket{0}_b$ を $\ket{0}_b = c_0 f(\hat{a}^\dagger)\ket{0}$ と表したとき $f(\hat{a}^\dagger)$ を求めよ。

3.4

(3.5) を満たす状態 $\ket{\psi}$ に対する個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の期待値を、コヒーレント状態における位置と運動量の標準偏差 $\Delta x_0 := \sigma_0$, $\Delta p_0 := \frac{\hbar}{2\sigma_0}$ および σ を用いて表せ。

[*1] ヒント：$\hat{b}\ket{0}_b = 0$ を用いよ。