量子力学 II 演習問題 7

2019 年 6 月 19 日

1　座標系と正準交換関係

古典力学では、系を記述する座標としてデカルト座標 (x_1, x_2, x_3) 以外にも、極座標 (r, θ, ϕ) などを用いることができた。それでは、極座標を基にして正準変数の間に交換関係

$$\left[\hat{r}, \hat{p}_r\right] = i\hbar, \quad \left[\hat{\theta}, \hat{p}_\theta\right] = i\hbar, \quad \left[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi\right] = i\hbar \tag{1.1}$$

を設定することにより対応する量子論を得ることができるだろうか？
以下では、$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ の固有値 (r, θ, ϕ) の同時固有ケット $\left|r, \theta, \phi\right\rangle$ に関する表示を用いる。

1.1

演算子 $\hat{p}'_r$ を $\hat{p}'_r := -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ と定めたとき、$\left[\hat{r}, \hat{p}'_r\right] = i\hbar$ となることを確認せよ。

1.2

演算子 $\hat{p}'_r$ はエルミートでないことを示せ。また、$\left[\hat{r}, \hat{p}_r\right] = i\hbar$ を満たすエルミート演算子 $\hat{p}_r$ を構成せよ。

1.3

極角 θ と方位角 ϕ について、交換関係 $\left[\hat{\theta}, \hat{p}_\theta\right] = i\hbar, \left[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi\right] = i\hbar$ を満たすエルミートな $\hat{p}_\theta, \hat{p}_\phi$ を構成せよ。

1.4

$(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi};\hat{p}_r,\hat{p}_\theta,\hat{p}_\phi)$ を用いて、中心力ポテンシャルにおけるハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r) \tag{1.2}$$

を置き換え $(p_r,p_\theta,p_\phi)\mapsto(\hat{p}_r,\hat{p}_\theta,\hat{p}_\phi)$ により"量子化"せよ。このようにして得られたハミルトニアン $\hat{H}'$ が 3 次元回転対称性を持っているかどうかを調べよ。[*1]

2　2 次元等方調和振動子の回転対称性

2 次元等方調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2\right)+V(\hat{r}),\quad V(r)=\frac{m\omega^2}{2}r^2,\quad \hat{r}=\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2} \tag{2.1}$$

であり、そのポテンシャルは中心対称性（2 次元回転対称性）を持つ。各方向の調和振動子の消滅演算子を $\hat{a}_x,\hat{a}_y$ を

$$\hat{a}_x=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x}+i\hat{p}_x\right),\quad \hat{a}_y=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{y}+i\hat{p}_y\right) \tag{2.2}$$

とする。

2.1

z 方向の軌道角運動量演算子は $\hat{L}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$ である。$[\hat{H},\hat{L}_z]=0$ を示せ。

2.2

各方向 (x,y) の 1 次元調和振動子のエネルギー固有状態のテンソル積状態

$$|n_x n_y\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n_x!n_y!}}(\hat{a}_x^\dagger)^{n_x}(\hat{a}_y^\dagger)^{n_y}|0\rangle \quad \left(=|n_x\rangle_x\otimes|n_y\rangle_y\right) \tag{2.3}$$

は (2.1) のエネルギー固有状態である。しかし、この状態は z 方向の軌道角運動量演算子 $\hat{L}_z$ の固有状態ではなく、系の回転対称性を反映していないことを $\hat{L}_z\left|n_x n_y\right\rangle$ を計算することにより確かめよ。

[*1] 参考文献：猪木・川合（1994）『量子力学 I』講談社.

2.3

$\hat{a}_x, \hat{a}_y$ の線型結合により、演算子

$$\hat{a}_+ \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right), \quad \hat{a}_- \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right) \tag{2.4}$$

を定義する。これらが交換関係

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_-, \hat{a}_-^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_+, \hat{a}_-] = [\hat{a}_+, \hat{a}_-^\dagger] = 0 \tag{2.5}$$

を満たすことを示せ。

2.4

2 次元平面内での角度 ϕ の回転に対応するユニタリ演算子は $\hat{R}(\phi) = e^{-i\frac{\hat{L}_z\phi}{\hbar}}$ である。$\hat{a}_x, \hat{a}_y$ と $\hat{a}_+, \hat{a}_-$ の回転 $\hat{R}(\phi)$ の下における変換則を求めよ。すなわち、$\hat{R}(\theta)\hat{a}_\pm\hat{R}(\theta)^{-1}$ などを計算せよ。

2.5

状態

$$|n_+ n_-\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}}(\hat{a}_+^\dagger)^{n_+}(\hat{a}_-^\dagger)^{n_-}|0\rangle \tag{2.6}$$

が $\hat{H}$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態であることを確認し、この状態における $\hat{H}$ と $\hat{L}_z$ の固有値を求めよ。

2.6

前問で構成した $\hat{H}$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態 $|n_+ n_-\rangle$ を、(2.3) で定義された $|n_x n_y\rangle$ の線型結合として表せ。[*2]

[*2] ヒント：二項定理を用いよ。

3　等方調和振動子の隠れた対称性

d 次元等方調和振動子

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{d} \hat{x}_k^2 \tag{3.1}$$

は明らかに d 次元回転対称性を持つ。消滅演算子 $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x}_k + i\hat{p}_k\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$ を用いると、(3.1) は

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_{k=1}^{d} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{3.2}$$

と書ける。

3.1

(3.1) のエネルギー固有値とその縮退度を求めよ。

3.2

すべての消滅演算子 $\hat{a}_i$ について

$$\hat{V}\hat{a}_k\hat{V}^{-1} = e^{-i\alpha}\hat{a}_k, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

となるようなユニタリ演算子 $\hat{V}$ を $\hat{a}_i$ から構成せよ。[*3]

3.3

生成演算子 $\{\hat{a}_k\}_{k=1}^{d}$ を $\hat{b}_k = \sum_{l=1}^{d} u_{kl}\hat{a}_l$ と変換する。前問の結果から $\det(u) = +1$ としても一般性を失わない。このとき、

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0 \tag{3.4}$$

となるための必要十分条件は何か。

[*3] ヒント：$[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{a}_l] = -\delta_{kl}\hat{a}_k$ を用いよ。

3.4

前問で導いた条件のもとで、ハミルトニアン $\hat{H}$ の形が変換 $\hat{a}_k \mapsto \hat{b}_k$ に対して不変であることを示せ。

3.5

以下、2 次元等方調和振動子の場合を考える。2 次元回転の生成子 $\hat{L}_3 = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1$ が、$\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1$ と $\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2$ の線型結合で表されるように変換行列 u_{kl} を定めよ。

3.6

前問で定めた変換行列 u_{kl} から得られる $\hat{b}_1, \hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2, \hat{b}_2^\dagger$ を用いて

$$\hat{S}_1 \coloneqq \frac{\hbar}{2}\left(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_1\right), \quad \hat{S}_2 \coloneqq \frac{\hbar}{2i}\left(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2 - \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_1\right), \quad S_3 \coloneqq \frac{1}{2}\hat{L}_3 \tag{3.5}$$

と定める。交換関係 $[\hat{S}_i, \hat{S}_j]$ を計算せよ。

3.7

状態 $|Nm\rangle$ を

$$\hat{H}\,|Nm\rangle = \hbar\omega(N+1), \quad \hat{L}_3\,|Nm\rangle = m\hbar\,|Nm\rangle \tag{3.6}$$

を満たす $d = 2$ の場合のハミルトニアン $\hat{H}$ と軌道角運動量 $\hat{L}_3$ の同時固有状態とする。

$\hat{S}^2 = \sum_k \hat{S}_k^2, \hat{S}_3$ の固有値と $|Nm\rangle$ との間の関係を求めよ。特に、各エネルギー固有値の縮退度は $\hat{S}^2$ の固有値とどのように関係しているか。[*4]

[*4] ここで SU(2) 対称性の生成子 $\hat{S}_3$ が 2 次元回転の生成子 $\hat{L}_3$ そのものではないことに注意せよ。