

# 量子力学I Homework 2

上田正仁

2009 Dec. 21

## 問題

定常状態の1次元 Schrödinger 方程式

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (1)$$

について以下の無限井戸ポテンシャル中での波動関数を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \text{ or } x > L) \\ 0 & (0 < x < L) \end{cases} \quad (2)$$

- (1) 固有関数  $\phi_n(x)$  と固有値  $E_n$  をすべて、規格化も含めて求めよ。
- (2) 異なる固有関数同士が互いに直交することを確かめよ。
- (3) 以下の Poisson の和公式を示せ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-inx) \quad (3)$$

Hint :  $G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n)$  は周期  $2\pi$  の周期関数なので Fourier 変換

$$G_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx G(x) \exp(-inx) \quad (4)$$

を考えられる。これと  $x=0$  での Fourier 変換の関係式

$$G(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \quad (5)$$

を用いれば示せる。

- (4) 上の (1) で求めた固有関数たちが完全性関係

$$\sum_n \phi_n(x) \phi_n(y) = \delta(x - y) \quad (6)$$

を  $0 < x < L$ 、 $0 < y < L$  の領域で満たすことを示せ。必要であれば (3) で示した和公式を利用せよ。

### Key Point

異なる固有値に対応する固有関数同士は直交する。またすべての固有関数集まりは完全系をなし、完全性関係式 (6) を満たす。